ESERCIZIO

Trovare autovalori e autovettori di $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ e scegliere P in modo che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

Da A si vede direttamente che $\underline{3}$ è autovalore e che $\underline{e_2}$ è un autovettore rel. a 3.

$p_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)$ l'altro autovalore è $\underline{1}$

Cerco un autovettore relativo all'autovalore 1

$A-1\cdot I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ $\quad |2\ \ 2|\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}=0 \quad x+y=0$

$v_1=\begin{vmatrix}1\\ -1\end{vmatrix}$ è autovettore

La matrice diagonale $P^{-1}AP$ sarà $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

Determino P $\quad \mathcal{C}=(v_1, e_2)$ base di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_c\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{R}^2\ \mathcal{B}_c \arrow[d] \\
\mathcal{C}\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "id"] & \mathbb{R}^2\ \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$$P=M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_c}(id_{\mathbb{R}^2})=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\ \ v_1 \quad\ e_2\end{array}$$

$\det(P)=1\neq 0 \Rightarrow P$ è invertibile. $\quad P^{-1}=?$

ESERCIZIO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \\ -1 & -3 \end{matrix} \Bigg| =$$

$$= \lambda^2(3-\lambda) + 1 - 3\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$ OPPURE SPIEGARE

$\lambda = 1$ è l'unico autovalore $\quad m_{alg}(1) = 3$

$$rg(A - 1 \cdot I_3) = rg \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & +2 \end{bmatrix} \underset{C_2 \rightsquigarrow C_2 - C_1}{=} rg \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$m_g(1) = 3 - 2 = 1$

L_A sarebbe stata diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ sarebbe stat autovettore relativo all'autovalore 1. Cioè

$$L_A v = 1 \cdot v = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow L_A = id_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Longrightarrow A = I_3 \quad , \text{ assurdo}$$

ESERCIZIO Una matrice A, 2×2 ha autovalori $0, 1$ corrispondenti agli autovettori $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ risp.
$Tr(A)$? $\det(A)$? $A=$? A è simmetrica?

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0 \Rightarrow v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} = v_2 \text{ sono}$$

lin. indipendenti

$\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ è base di $\mathbb{R}^2$.

Costruisco l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(v_1) = 0 \cdot v_1 = 0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad f(v_2) = 1 \cdot v_2 = v_2$$

f esiste ed è unica per il TDAL.

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO Trovare P 2×2, invert. tale che $P^{-1} M_{\mathcal{C}}(f) P = A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$

Oppure

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

Ma so che $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda$ da cui

$$1 \begin{cases} a+d = 1 & = Tr(A) \\ ad - bc = 0 & = \det(A) \end{cases}$$

Adesso sfrutto gli autovettori

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+2b \\ c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} a+2b = 0 \\ c+2d = 0 \end{cases} \quad 2$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2a-b \\ 2c-d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} 2a-b = 2 \\ 2c-d = -1 \end{cases} \quad 3$$

Considero il SL formato dalla prima equaz. di 1, da 2 e 3:

$$\begin{cases} a \qquad\qquad + d = 1 \\ a + 2b \qquad\quad = 0 \\ 2a - b \qquad\quad = 2 \\ \qquad\quad c + 2d = 0 \\ \qquad\quad 2c - d = -1 \end{cases}$$

Si può buttarsi a corpo morto sull'algoritmo di elim. di Gauss

MA ... SPIEGARE

SPIEG.

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = -5 \neq 0 \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = A^{-1} A \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = A^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} = a \\ = b \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{vmatrix} \begin{matrix} = c \\ = d \end{matrix}$$

Devo verificare se è soddisfatta anche la prima equazione del sistema:

$$a + d = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1 \qquad \text{OK}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 0 \qquad \underline{\text{OK}}$$

ESERCIZIO

Trovare polinomio caratteristico e autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix} = -\det \left| \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda^2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{matrix} =$$

$$= -(-\lambda^4 + 1) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)\underbrace{(\lambda^2 + 1)}_{\text{non ha radici reali}}$$

Gli unici autovalori (reali) sono $\underline{\lambda = 1}$ e $\underline{\lambda = -1}$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$A - 1 \cdot I_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \\ 1 & & & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ha } rg = 3$$

SPIEGARE

$R_4 = -(R_1 + R_2 + R_3)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

param. libero

Lo spazio di tutte le soluz. di quest SLO ha per base (pongo $t = 1$ e vado a ritroso)

$$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\lambda = -1}$

$$A - (-1)I_4 = A + I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$R_4 = R_1 - R_2 + R_3 \Rightarrow$ la matrice ha $rg = 3$

trovo $v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ base dell'autospazio W_{-1}

Posso pensare A come matrice ad entrate <u>in $\mathbb{C}$</u>.
Allora ho anche gli autovalori $\lambda = i = \sqrt{-1}$ e $\lambda = -i$
Trovo rispettivi autovettori

$\boxed{\lambda = i}$

$$A - i I_4 = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightsquigarrow i R_1} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$R_4 \rightsquigarrow R_4 - R_1$
$R_2 \rightsquigarrow i R_2$
$R_3 \rightsquigarrow i R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 0 & -i \end{bmatrix} \qquad i R_2 + R_3 + R_4 = 0$$

$$\Rightarrow rg(A - i I_4) = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + iy \\ y + iz \\ z + it \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad v_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{vmatrix}$$

$\boxed{\lambda = -i}$ Potrei fare conti analoghi. Oppure usare il coniugio complesso

$$\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \gamma(z) = \bar{z} \quad \text{se} \quad z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib$$

Buone proprietà di γ:

$\gamma \circ \gamma = id_{\mathbb{C}} \Rightarrow$ <u>γ è biettiva</u>

$$\left.\begin{aligned} \gamma(z_1 + z_2) = \gamma(z_1) + \gamma(z_2) \qquad & \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \gamma(z_1 z_2) = \gamma(z_1) \cdot \gamma(z_2) \qquad & \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}\right\} (\ast)$$

So che:

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{SPIEG.}]{(\ast)} \bar{A} \begin{vmatrix} \bar{1} \\ \bar{i} \\ \overline{-1} \\ \overline{-i} \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} \bar{1} \\ \bar{i} \\ \overline{-1} \\ \overline{-i} \end{vmatrix} \quad \text{cioè}$$

$$A\begin{vmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{vmatrix} = (-i)\begin{vmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{vmatrix} \qquad v_4 = \begin{vmatrix}1\\-i\\-1\\i\end{vmatrix}$$ è un autovettore rel. all'autovalore $-i = \bar{i}$

$$v_4 = \overline{v_3}$$

Perché fare questo lavoro? Mi dà qualcosa su $\mathbb{R}^4$?

$$L_A(v_3) = i\,v_3 \qquad L_A : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4 \qquad L_A(v_4) = -i\,v_4$$

$$\Rightarrow L_A(v_3+v_4) = L_A(v_3) + L_A(v_4) = i\,v_3 - i\,v_4 \in \mathbb{R}^4$$

$$v_3+v_4 = \begin{vmatrix}1+1\\i-i\\-1-1\\-i\ \ i\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2\\0\\-2\\0\end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$L_A(v_3+v_4) \in \mathbb{R}^4$!!

$z = a+ib \in \mathbb{C}$

$\bar{z} = a - ib$

$z + \bar{z} = 2a$

$z - \bar{z} = 2ib \Rightarrow i(z-\bar{z}) = -2b$

$$L_A(i v_3 - i v_4) = L_A(i v_3) - L_A(i v_4) = i\,L_A(v_3) - i\,L_A(v_4) =$$

$$= i \cdot i\, v_3 - i(-i)\, v_4 = -v_3 - v_4 = -(v_3+v_4)$$

$v_1,\ v_2,\ w_3 \stackrel{def}{=} v_3 + v_4,\ w_4 \stackrel{def}{=} i v_3 - i v_3$

<u>ESERCIZIO</u> $(v_1, v_2, w_3, w_4) = \mathcal{E}$ è base di $\mathbb{R}^4$

$$M_{\mathcal{E}}(L_A) = \begin{array}{c|cc|cc|c} & & & & & \\ & 1 & 0 & & & v_1 \\ & 0 & -1 & \multicolumn{2}{c|}{0} & v_2 \\ \hline & & & 0 & -1 & w_3 \\ & \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 & w_4 \\ & L_A(v_1) & L_A(v_2) & L_A(w_3) & L_A(w_4) & \end{array}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \qquad A \text{ è } \underline{\text{simmetrica}}$$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = ac - \lambda(a+c) + \lambda^2 - b^2$$

$$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

$$\Delta = 0 \iff a - c = 0 \text{ e } b = 0 \iff A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{ è già matr. diagonale}$$

Se $\Delta > 0$ ci sono due autovalori <u>distinti</u>, ciascuno avente molteplicità algebrica $= 1$. Dunque A è diagonalizzabile.

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4)$$

Autovalori: $\lambda = 2$ su $\mathbb{R}$ (l'unico) $\quad \overbrace{\lambda = \sqrt{3}+i \qquad \lambda = \sqrt{3}-i}^{\text{su } \mathbb{C}}$

Tutti con molteplicità algebrica $= 1$:

$$p_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda - \sqrt{3} - i)(\lambda - \sqrt{3} + i)$$

Provare a fare per questo esempio l'analogo di quanto fatto in un esercizio precedente.