Complementi di logica

1. La negazione, la congiunzione e la disgiunzione

La negazione

Data una proposizione, si può costruire la sua **negazione** facendo precedere il connettivo «non» al predicato verbale. Consideriamo la proposizione:

«oggi c'è il Sole»

La sua negazione è:

«oggi **non** c'è il Sole»

Indicata la proposizione «oggi c'è il Sole» con la lettera p, la sua negazione si indica con il simbolo

$\overline{p}$ (da leggere «non p»).

Il connettivo «**non**» produce una nuova proposizione il cui valore di verità è cambiato rispetto alla proposizione iniziale a cui è stato applicato: se la proposizione p è vera, $\overline{p}$ è falsa e viceversa.
Possiamo allora esprimere nella tabella qui a fianco, detta **tavola di verità**, il valore di verità della proposizione $\overline{p}$ in funzione del valore di verità di p.

Altre notazioni

In alcuni testi, per indicare la negazione di una proposizione p, oltre al simbolo $\overline{p}$ si trovano anche i simboli «$\sim p$» e «$\neg p$».

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

ESEMPI

Data la proposizione p, scriviamo la sua negazione $\overline{p}$ e determiniamo il valore di verità di $\overline{p}$.

p	$\overline{p}$	Valore di verità di $\overline{p}$
«6 è un numero primo»	«6 non è un numero primo»	$\overline{p}$ è vera
«$5 + 2 = 7$»	«$5 + 2 \neq 7$»	$\overline{p}$ è falsa
«ogni numero primo è dispari»	«non è vero che ogni numero primo è dispari» ovvero «esiste almeno un numero primo che è pari»	$\overline{p}$ è vera (2 è pari e primo)

La congiunzione

Due proposizioni possono essere legate tra loro dalla congiunzione «**e**» che, in logica matematica, viene indicata con il simbolo «$\wedge$». Questo modo di legare due proposizioni viene chiamato **congiunzione**.
Per esempio, se p è la proposizione «Paolo ha preso 5 in Matematica» e q è la proposizione «Paolo ha preso 7 in Italiano», possiamo formare la nuova proposizione

«Paolo ha preso 5 in Matematica **e** 7 in Italiano»

che si indica con il simbolo $p \wedge q$ e si legge «p e q».
Supponiamo ora che Paolo torni a casa da scuola e dica «Ho preso 5 in Matematica e 7 in Italiano». È evidente che Paolo ha detto la verità solo se *entrambe* le proposizioni «Paolo ha preso 5 in Matematica» e «Paolo ha preso 7 in Italiano» sono vere.
Più in generale: la proposizione $p \wedge q$ risulta vera quando sono vere *entrambe* le proposizioni p e q, risulta *falsa* negli altri casi.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La *tavola di verità* che rappresenta il valore di verità della proposizione $p \wedge q$, in funzione dei valori di verità di p e q, è quindi quella qui a fianco.

ESEMPI

Date le proposizioni p: «Milano è in Italia» e q: «Milano è in Europa», esprimiamo a parole le proposizioni $p \wedge q$ e $p \wedge \overline{q}$ e individuiamone il valore di verità.

Proposizione in simboli	Proposizione a parole	Valore di verità
$p \wedge q$	«Milano è in Italia **e** in Europa»	La proposizione $p \wedge q$ è vera in quanto sia p sia q sono vere
$p \wedge \overline{q}$	«Milano è in Italia **e non** è in Europa»	La proposizione $p \wedge \overline{q}$ è falsa in quanto $\overline{q}$ è falsa

La disgiunzione

Due proposizioni possono essere legate dalla congiunzione «**o**», o dalla congiunzione «oppure», che, in logica matematica, vengono indicate con il simbolo «$\vee$»: questo modo di legare due proposizioni viene chiamato **disgiunzione**.
Per esempio, se p è la proposizione «Paolo gioca a tennis» e q è la proposizione «Paolo gioca a calcio», possiamo formare la nuova proposizione

«Paolo gioca a tennis **o** a calcio»

che indichiamo con il simbolo $p \vee q$ e leggiamo «p o q».
Occorre però chiarire l'esatto significato da dare al connettivo «o». Infatti, in italiano, la congiunzione «o» viene utilizzata in due modi diversi:

- in senso *esclusivo* (corrispondente al latino *aut*), come nella frase «mi iscriverò al liceo classico o al liceo scientifico»: in questo caso, delle due possibilità se ne può verificare una sola (non è possibile iscriversi, contemporaneamente, al liceo classico e al liceo scientifico);
- in senso *inclusivo* (corrispondente al latino *vel*) come nella frase «su quest'ascensore possono salire i ragazzi di età maggiore di 12 anni o accompagnati da un adulto»: in questo caso non si esclude che le due possibilità si verifichino contemporaneamente (sull'ascensore possono salire ragazzi di età maggiore di 12 anni che sono anche accompagnati da un adulto).

In logica matematica, al connettivo «o» si dà il significato *inclusivo*. Quindi, la proposizione precedente

$p \vee q$: «Paolo gioca a tennis o a calcio»

sta per:

«Paolo gioca a tennis, oppure a calcio, oppure gioca sia a tennis sia a calcio».

Dal momento che la proposizione $p \vee q$ vuole affermare il verificarsi di *almeno una* delle affermazioni espresse dalle proposizioni p e q, senza escludere che si verifichino entrambe, la proposizione $p \vee q$ è vera se almeno una delle due proposizioni p o q è vera; mentre è falsa soltanto quando sia p sia q sono false.
La tavola di verità di $p \vee q$ è quindi quella qui a fianco.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ESEMPI

Date le proposizioni p: «5 è pari» e q: «5 è primo», esprimiamo a parole le proposizioni $p \vee q$ e $p \vee \overline{q}$, e individuiamone il valore di verità.

Proposizione in simboli	Proposizione a parole	Valore di verità
$p \vee q$	«5 è pari **o** è primo»	$p \vee q$ è vera poiché q è vera
$p \vee \overline{q}$	«5 è pari **o** non è primo»	$p \vee \overline{q}$ è falsa poiché sia p sia $\overline{q}$ sono false

Riassumiamo nella seguente tabella le proprietà dei connettivi «non», «e», «o» che abbiamo esaminato in questo paragrafo.

	A parole	In simboli	Modo di operare
Negazione	non p	$\bar{p}$	$\bar{p}$ è vera se p è falsa; falsa se p è vera
Congiunzione	p e q	$p \wedge q$	$p \wedge q$ è vera se sia p sia q sono vere; falsa negli altri casi
Disgiunzione	p o q	$p \vee q$	$p \vee q$ è vera se almeno una delle due proposizioni, p o q, è vera; falsa se sia p sia q sono false

PER SAPERNE DI PIÙ **I connettivi come operazioni**

La *congiunzione* e la *disgiunzione* si possono interpretare come *operazioni interne* all'insieme delle proposizioni: infatti i connettivi «e» ed «o» associano, a ogni coppia di proposizioni, un'altra proposizione.
La *negazione* **non** si può interpretare come operazione, secondo la definizione data nel Paragrafo 6 dell'Unità 4, poiché **non** agisce su *due* elementi; se introduciamo, però, il concetto di operazione *unaria* in un insieme, cioè di operazione che agisce su *un solo* elemento, allora la negazione si può interpretare come operazione unaria nell'insieme delle proposizioni.

Prova tu

Date le proposizioni p: «6 è multiplo di 4» e q: «6 è divisibile per 5», esprimi a parole le seguenti proposizioni indicate in forma simbolica e individuane il valore di verità:

$\bar{p} \qquad p \wedge q \qquad p \vee q \qquad p \wedge \bar{q} \qquad \bar{p} \vee q$

ESERCIZI a p. 22

2. Le tavole di verità e l'equivalenza di proposizioni

La costruzione di una tavola di verità

Abbiamo visto che, date due proposizioni elementari p e q, mediante l'utilizzo dei connettivi «non», «e» ed «o», si possono ottenere le proposizioni:

$\bar{p} \qquad p \wedge q \qquad p \vee q$

Si possono poi ulteriormente combinare le proposizioni così ottenute e ottenere proposizioni composte più complesse: si ottengono così delle vere e proprie *espressioni logiche*, come:

$\bar{p} \vee q \qquad p \wedge (p \vee q) \qquad \bar{p} \vee (q \wedge p)$

Analogamente a quanto abbiamo fatto per le proposizioni $\bar{p}$, $p \wedge q$, $p \vee q$, possiamo costruire la **tavola di verità** di queste proposizioni composte: possiamo cioè costruire una tabella che esprime qual è il valore di verità della proposizione composta, in corrispondenza di tutti i possibili valori di verità delle proposizioni elementari che la compongono.

ESEMPIO

Costruiamo la tavola di verità della proposizione $p \wedge (p \vee q)$.

Per costruire la tavola di verità di una proposizione composta procediamo, come nella semplificazione delle espressioni numeriche, dal livello più «interno» a quello più «esterno».

Primo passo Costruiamo due colonne in cui elenchiamo le combinazioni di tutti i possibili valori di verità delle proposizioni elementari p e q che formano la proposizione composta.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Secondo passo Aggiungiamo la colonna relativa a $p \vee q$.

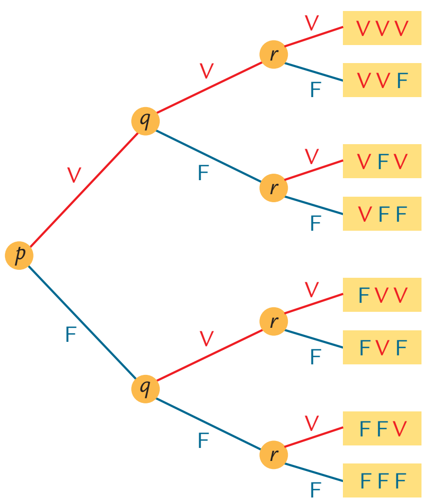
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Terzo passo Costruiamo l'ultima colonna, dove poniamo i valori di verità di $p \wedge (p \vee q)$, deducendoli, in base alle proprietà del connettivo $\wedge$, dai valori di verità di p e di $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Qui per esempio, abbiamo posto il valore di verità F perché, se p è falsa (F) e $p \vee q$ è vera (V), allora $p \wedge (p \vee q)$ è falsa.

Nell'esempio precedente abbiamo costruito la tavola di verità di una proposizione composta, formata da *due* proposizioni elementari.
Nel prossimo esempio costruiremo la tavola di verità della proposizione composta $(p \wedge q) \vee r$, costituita dalle *tre* proposizioni elementari p, q ed r. Per descrivere tutte le possibili combinazioni dei valori di verità di p, q ed r, potrà essere utile servirsi del diagramma ad albero riportato qui sotto.



ESEMPIO

Costruiamo la tavola di verità della proposizione $(p \wedge q) \vee r$.

Primo passo Costruiamo anzitutto tre colonne, in cui poniamo tutti i possibili valori di verità di p, q ed r (rappresentati nel diagramma ad albero alla pagina precedente).

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Secondo passo Costruiamo una quarta colonna (in azzurro nella tabella qui sotto) dove, in ogni riga, poniamo il valore di verità di $p \wedge q$ in corrispondenza dei valori di verità di p e q di quella riga.

p	q	r	$p \wedge q$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Su questa riga, per esempio, poniamo il valore V, poiché se p è vera (V) e q è vera (V), anche la proposizione $p \wedge q$ è vera.

Terzo passo Costruiamo infine un'ultima colonna (in rosso nella tabella qui sotto) dove, per ogni riga, poniamo il valore di verità di $(p \wedge q) \vee r$ corrispondente ai valori di verità di $p \wedge q$ e di r su quella riga.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Su questa riga, per esempio, poniamo il valore V, poiché se $p \wedge q$ è vera (V) ed r è falsa (F), allora la proposizione $(p \wedge q) \vee r$ è vera.

Proposizioni logicamente equivalenti

Due proposizioni si dicono **logicamente equivalenti** se le loro *tavole di verità* coincidono. Per indicare che due proposizioni p e q sono logicamente equivalenti scriveremo semplicemente

$$p = q$$

dove il simbolo «$=$» ha il significato di «logicamente equivalente».

Altre notazioni

In alcuni testi, per indicare l'equivalenza logica, invece del simbolo $=$ si utilizza il simbolo $\equiv$.

ESEMPIO

Dimostriamo che le proposizioni $\overline{p \wedge q}$ e $\overline{p} \vee \overline{q}$ sono logicamente equivalenti.

Dobbiamo costruire le tavole di verità delle due proposizioni $\overline{p \wedge q}$ e $\overline{p} \vee \overline{q}$, quindi verificare che coincidono.

Costruiamo anzitutto una tabella come la seguente.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Compiliamo le colonne colorate in azzurro.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V		F	F	
V	F	F		F	V	
F	V	F		V	F	
F	F	F		V	V	

Concludiamo compilando le colonne colorate in rosso.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

stessi valori di verità

L'uguaglianza delle due colonne in rosso mostra che le tavole di verità di $\overline{p \wedge q}$ e $\overline{p} \vee \overline{q}$ sono le stesse, quindi le due proposizioni sono logicamente equivalenti.

Leggi di De Morgan

Nell'esempio precedente abbiamo dimostrato l'equivalenza logica:

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q} \qquad [1]$$

Analogamente si può dimostrare che:

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} \qquad [2]$$

Queste due equivalenze logiche, dette **leggi di De Morgan**, ci dicono anzitutto che i connettivi «e» e «o» **non** sono indipendenti, ma si potrebbe usare solo uno dei due, ed esprimere l'altro per mezzo del primo e della negazione: per esempio, si potrebbe eliminare la «e» e usare solo la «o» e la negazione poiché

$$p \wedge q = \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$$

Le leggi di De Morgan, inoltre, sono utili per negare proposizioni composte in cui compaiono i connettivi «e» e «o».
A parole la [1] e la [2] si possono infatti esprimere dicendo che:

- la negazione della *congiunzione* di due proposizioni elementari equivale alla *disgiunzione* delle loro negazioni;
- la negazione della *disgiunzione* di due proposizioni elementari equivale alla *congiunzione* delle loro negazioni.

Dalla storia

Queste equivalenze erano sostanzialmente note almeno dall'inizio del XV secolo, tuttavia il matematico e logico inglese **Augustus De Morgan** (1806-1871) fu il primo a formalizzarle simbolicamente nel suo volume di *Logica formale* che fu pubblicato nel 1847: per questo motivo la [1] e la [2] sono note come *leggi di De Morgan*.

ESEMPIO

Utilizzando le leggi di De Morgan, neghiamo la proposizione «Paolo gioca a tennis e a calcio».

Consideriamo le due proposizioni:

p: «Paolo gioca a tennis» e q: «Paolo gioca a calcio»

La proposizione data equivale a $p \wedge q$ e la sua negazione è:

$\overline{p \wedge q}$: «**non è vero** che Paolo gioca a tennis **e** a calcio»

Possiamo riscrivere quest'ultima proposizione in forma equivalente utilizzando le leggi di De Morgan. In base alla [5.2], infatti, $\overline{p \wedge q}$ è equivalente a $\overline{p} \vee \overline{q}$; quindi la negazione di $p \wedge q$ si può esprimere anche nella forma:

$\overline{p} \vee \overline{q}$: «Paolo **non** gioca a tennis **o non** gioca a calcio»

Proprietà dei connettivi

Oltre alle leggi di De Morgan, vi sono altre equivalenze logiche importanti, note come «proprietà dei connettivi». Le principali sono riassunte nella seguente tabella.

Proprietà dei connettivi	Espressione
Legge della doppia negazione	$\overline{\overline{p}} = p$
Proprietà di idempotenza della congiunzione Proprietà di idempotenza della disgiunzione	$p \wedge p = p$ $p \vee p = p$
Proprietà commutativa della congiunzione Proprietà commutativa della disgiunzione	$p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$
Proprietà associativa della congiunzione Proprietà associativa della disgiunzione	$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
Proprietà distributive	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leggi di assorbimento	$p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (p \vee q) = p$
Leggi di De Morgan	$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

COLLEGHIAMO I CONCETTI

I connettivi e le operazioni fra insiemi

- Prova a pensare che le lettere indicate nelle precedenti uguaglianze rappresentino insiemi (invece che proposizioni) e sostituisci i simboli $\vee$ ed $\wedge$, rispettivamente, con i simboli $\cup$ e $\cap$ (di unione e intersezione insiemistica), dando al soprassegno il significato di complementazione insiemistica (invece che quello di negazione). Ti accorgerai che c'è perfetta corrispondenza tra le proprietà dei connettivi e quelle delle operazioni fra insiemi; per esempio, alle proprietà di idempotenza della congiunzione e della disgiunzione corrispondono le proprietà di idempotenza dell'intersezione e dell'unione:

  $P \cap P = P$ e $P \cup P = P$

- Esistono quindi le seguenti corrispondenze tra connettivi e operazioni insiemistiche:

  connettivo «e» $\rightarrow$ intersezione
  connettivo «o» $\rightarrow$ unione
  connettivo «non» $\rightarrow$ complementazione

- Queste corrispondenze sono suggerite anche dalle definizioni stesse di intersezione, unione e differenza fra insiemi, date nell'Unità 4. Se ricordi tali definizioni, ti renderai conto, infatti, che abbiamo utilizzato proprio i connettivi **e**, **o** e **non**, secondo la corrispondenza osservata.

Prova tu

1. Costruisci le tavole di verità delle proposizioni:

$$\overline{p} \wedge q \qquad (p \wedge q) \vee \overline{q} \qquad (p \vee q) \wedge r$$

2. Stabilisci quali delle seguenti coppie di proposizioni sono logicamente equivalenti.

a. $p \wedge q, \quad q \wedge p$

b. $\overline{p} \vee q, \quad \overline{p \wedge \overline{q}}$

c. $(p \wedge q) \vee r, \quad (p \vee q) \wedge r$ [a. e b.]

3. Scrivi la negazione della proposizione: «15 è pari o primo» e utilizza le leggi di De Morgan per riscriverla in una forma logicamente equivalente.

ESERCIZI a **p. 24**

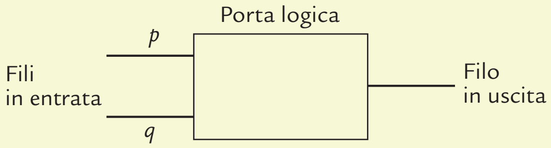
MATEMATICA NELLA REALTÀ

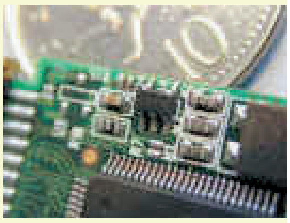
La logica e i circuiti

Pensa alla luce interna dell'abitacolo di un'automobile a due porte: a meno che tu non l'abbia accesa appositamente, la luce si attiva se una delle due porte è aperta, o se lo sono entrambe, mentre resta spenta in caso contrario.
La tabella qui a fianco riassume tutte le possibilità.

Porta 1	Porta 2	Luce
aperta	aperta	accesa
aperta	chiusa	accesa
chiusa	aperta	accesa
chiusa	chiusa	spenta

Se ora provi a sostituire in tabella le parole «aperta» e «accesa» con «vero» e le parole «chiusa» e «spenta» con «falso», ti accorgerai che la tabella presenta la stessa struttura della tavola di verità del connettivo «o». Questo semplice esempio suggerisce che c'è uno stretto legame tra **logica** e **circuiti elettronici**.
Effettivamente le porte e la luce sono collegati da un circuito elettronico in grado di operare proprio come il connettivo «o».
Circuiti di questo tipo sono presenti in tutti quegli strumenti che definiamo «elettronici» e sono alla base del loro funzionamento. Per esempio, i componenti elementari dei computer sono semplicissimi circuiti, chiamati **porte logiche**, che possono assumere varie forme.
Per capirne il funzionamento, non è necessario conoscere come le porte logiche siano materialmente costruite; è sufficiente rappresentarle come un dispositivo elettrico con fili in entrata e in uscita. Un modello di porta logica, con due fili in entrata denominati p e q, è disegnato nella figura qui sotto.



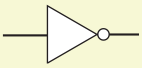


Il microprocessore è il cuore elaborativo del computer. È costituito da una sottile piastra di silicio su cui sono impressi milioni di componenti.
Un microprocessore può contenere milioni di porte logiche.

I fili in entrata e in uscita possono portare *segnali* elettrici di *due* stati diversi, che si indicano con i numeri 1 e 0: si parla, perciò, di segnali *binari*. Puoi pensare a questi due tipi di segnale come a una corrente ad alta o bassa tensione. Una porta logica agisce su questi segnali in ingresso e produce in uscita altri segnali, ancora del tipo 1 o 0.
Per descrivere il funzionamento di una porta logica basta conoscere i segnali che vengono prodotti in uscita, in corrispondenza di tutte le possibili combinazioni dei segnali in entrata. Queste informazioni possono essere riportate in una tabella di entrata-uscita, che ha un ruolo del tutto simile a quello delle tavole di verità.
Le porte logiche di base sono tre: NOT, AND, OR. Nello schema a pagina successiva abbiamo riportato, per ciascuna di queste tre porte logiche fondamentali, il simbolo con cui viene indicata e la tavola di entrata-uscita che ne descrive il funzionamento.

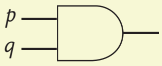
Porta logica	Simbolo	Tavola di entrata-uscita

NOT



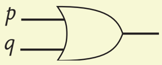
Ingresso	Uscita NOT
0	1
1	0

AND



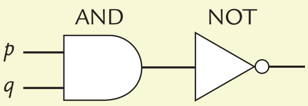
Ingressi		Uscita
p	q	**AND**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

OR



Ingressi		Uscita
p	q	**OR**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La porta **NOT** produce in uscita un segnale di tipo opposto a quello in entrata: il segnale in uscita è del tipo 1 se il segnale in entrata è 0, mentre è del tipo 0 se il segnale in entrata è del tipo 1.
La porta **AND** invece produce in uscita il segnale 1 solo se entrambi i fili in entrata portano un segnale del tipo 1, altrimenti il segnale in uscita è del tipo 0.
La porta **OR** infine produce in uscita il segnale 1, se almeno uno dei due fili in entrata porta un segnale del tipo 1, altrimenti il segnale in uscita è del tipo 0.
Come puoi notare, le tabelle dei segnali in entrata e uscita delle porte logiche NOT, AND e OR corrispondono esattamente alle tavole di verità di $\overline{p}$, di $p \wedge q$ e di $p \vee q$. Le differenze riguardano solo le notazioni, in quanto 1 e 0 sono usati al posto di vero e falso.
Come le proposizioni si possono legare fra loro in modo da dar luogo a *proposizioni composte,* così le porte logiche NOT, AND e OR possono essere connesse in modo che i segnali in uscita da una di queste porte diventino segnali in entrata per altre porte logiche: si ottengono così circuiti più complessi, detti **reti logiche**.
Per esempio, la rete logica rappresentata nella fig. 5.1 agisce così: i due segnali in entrata, p e q, subiscono una prima trasformazione tramite una porta AND, quindi il segnale in uscita viene ulteriormente trasformato da una porta NOT.
Analogamente a come abbiamo costruito la tavola di verità di una proposizione composta, possiamo costruire la tavola di entrata-uscita di una rete logica. È evidente che la tavola di entrata-uscita della rete in fig. 1 corrisponde esattamente alla tavola di verità di $\overline{p \wedge q}$.



Ingressi			Uscita
p	q	p AND q	NOT (p AND q)
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1

Figura 1

Il modello del calcolo delle proposizioni trova quindi pieno parallelismo nella teoria delle reti logiche. Per esempio, abbiamo visto che la proposizione composta $\overline{p \wedge q}$ è logicamente equivalente a $\bar{p} \vee \bar{q}$. Ciò porta come conseguenza che la rete logica disegnata in **fig. 2**, corrispondente alla proposizione $\bar{p} \vee \bar{q}$, agisce allo stesso modo della rete in **fig. 1**.
L'applicazione dell'algebra delle proposizioni, chiamata **algebra di Boole**, all'analisi dei circuiti fu suggerita dal matematico statunitense **Claude Elwood Shannon** (1916-2001) in un articolo del 1938. Dalla pubblicazione dell'articolo di Shannon, l'algebra di Boole è diventata essenziale per la progettazione dei circuiti, allo scopo di risparmiare componenti elettronici: un circuito viene prima tradotto nella proposizione corrispondente; la proposizione viene semplificata (cioè se ne cerca una logicamente equivalente, più semplice possibile); infine si costruisce il circuito corrispondente alla proposizione semplificata (il quale agirà come il circuito originario, ma avrà il vantaggio di poter essere costruito con un minor numero di componenti).

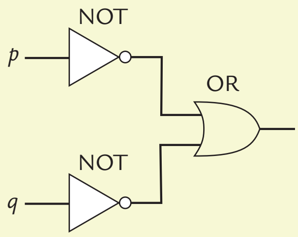


Figura 2

3. L'implicazione

Il connettivo «se ... allora»

Due proposizioni possono essere legate dalla locuzione «se ... allora», che si indica con il simbolo $\Rightarrow$. Consideriamo la frase «se arrivo tardi alla stazione, allora perdo il treno»: essa è formata legando tra loro le due proposizioni p: «arrivo tardi alla stazione» e q: «perdo il treno», mediante il connettivo «se ... allora». Possiamo esprimere la frase nella forma simbolica:

$$p \Rightarrow q$$

La composizione di due proposizioni p e q mediante il connettivo «**se ... allora**» viene chiamata **implicazione**; la proposizione p si chiama anche **premessa** dell'implicazione e la proposizione q si chiama **conseguenza.**
Il significato che si dà in matematica all'implicazione è un po' più sottile rispetto a quello degli altri connettivi che, in linea di massima, rispecchiano l'uso che se ne fa anche nel linguaggio quotidiano: per capirne il perché, discutiamo insieme un esempio. Supponiamo che, nel linguaggio corrente, Tizio dica a Caio «se domani c'è il Sole, allora vengo con te al mare»; se l'indomani piove è probabile che Caio non si aspetti che l'amico vada con lui al mare: si è dunque sottintesa l'affermazione «se invece piove, allora non vengo».
Nel linguaggio matematico ciò non accade: una proposizione del tipo $p \Rightarrow q$ non pone né vuole sottintendere nessuna condizione nel caso in cui p non si verifica. Per esempio, riprendiamo la frase che Tizio dice a Caio: «se domani c'è il Sole, allora vengo con te al mare». Intendendo il connettivo «se ... allora...» *in senso matematico*, la frase va interpretata in questo modo: Tizio si impegna su q (cioè ad andare al mare) solo nel caso in cui avvenga p (se il tempo è bello), mentre non si impegna a fare nulla se il tempo è brutto. Sulla base di questa assunzione, proviamo a riflettere su quale sia la risposta alla seguente domanda: in quali circostanze potremo affermare che Tizio non ha detto la verità, ovvero che la proposizione $p \Rightarrow q$ è falsa? Analizziamo i vari casi che possono presentarsi:

- se p è vera (il tempo è bello) e q è vera (Tizio va al mare), chiaramente $p \Rightarrow q$ è vera;
- se p è vera (il tempo è bello) e q è falsa (Tizio non va al mare), chiaramente Tizio non ha detto la verità, ossia $p \Rightarrow q$ è falsa;
- se p è falsa (il tempo non è bello), Tizio non si è impegnato a fare alcunché, quindi, sia nel caso che decida di andare lo stesso al mare, sia nel caso in cui non ci vada, non potremo dire che ha detto il falso; in altre parole, se p è falsa, dovremo in ogni caso ritenere vera l'affermazione di Tizio, $p \Rightarrow q$, qualsiasi sia il valore di verità di q.

In conclusione, c'è un solo caso in cui possiamo affermare che Tizio ha detto il falso: se p è vera e q è falsa.
È proprio questo il principio secondo cui in logica matematica si assegna il valore di verità a una implicazione:

La proposizione $p \Rightarrow q$ si ritiene falsa (F) **solo nel caso in cui** la premessa p è vera (V) ma la conseguenza q è falsa (F).

La tavola di verità di $p \Rightarrow q$ sarà quindi la seguente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Se la premessa p è falsa (F), la proposizione $p \Rightarrow q$ è vera (V), sia quando la conseguenza q è vera, sia quando è falsa. Questo fatto era già noto ai logici medioevali che scrivevano appunto: «*Ex falso quodlibet sequitor*», cioè «dal falso discende qualunque cosa».

ESEMPI

Date le proposizioni p: «Milano è una città italiana» e q: «Milano è una città europea», esprimiamo a parole le proposizioni $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow \overline{q}$, $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ e determiniamone il valore di verità.

Proposizione in simboli	Proposizione a parole	Valore di verità
$p \Rightarrow q$	«se Milano è una città italiana, allora è una città europea»	Le due proposizioni p e q sono entrambe vere. In base alla tavola di verità dell'implicazione: $p \Rightarrow q$ **è vera** (V)
$p \Rightarrow \overline{q}$	«se Milano è una città italiana, allora non è una città europea»	La proposizione p è vera e la proposizione $\overline{q}$ è falsa. In base alla tavola di verità dell'implicazione: $p \Rightarrow \overline{q}$ **è falsa** (F)
$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$	«se Milano non è una città italiana, allora non è una città europea»	La proposizione $\overline{p}$ è falsa e la proposizione $\overline{q}$ è falsa. In base alla tavola di verità dell'implicazione: $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ **è vera** (V)

Attenzione!

L'ultimo degli esempi qui a fianco mostra che, quando si afferma che la proposizione $p \Rightarrow q$ è vera, *non* si vuole affermare che q è vera.

Concludiamo osservando che, in base al modo di operare del connettivo $\Rightarrow$, il valore di verità di $p \Rightarrow q$ dipende solo dai valori di verità di p e q, anche se tali proposizioni *non sono correlate* tra loro. Per esempio, si ritiene vera la proposizione

$p \Rightarrow q$: «se $2 + 3 \leq 4$, allora 2 è un numero pari»

unicamente perché, in base al modo di operare dell'implicazione, la proposizione $p \Rightarrow q$ è certamente vera quando, come in questo caso, la premessa p è falsa.

I modi di leggere l'implicazione

Si usano parecchie espressioni diverse per leggere la proposizione $p \Rightarrow q$:
- p implica q
- se p allora q
- da p segue q
- p è condizione sufficiente per q
- q è condizione necessaria per p

Consideriamo, per esempio, la proposizione:

«essere milanesi implica essere italiani»

Essa si può esprimere nelle forme equivalenti:

- «se sei milanese allora sei italiano»
- «dall'essere milanesi segue l'essere italiani»
- «essere milanesi è condizione sufficiente per essere italiani»
- «essere italiani è condizione necessaria per essere milanesi»

In matematica sono frequenti le proposizioni del tipo $p \Rightarrow q$ che utilizzano le espressioni «condizione necessaria» e «condizione sufficiente», per cui è bene rifletterci un po' per evitare di commettere errori.
Soffermiamoci sull'esempio appena presentato della proposizione «essere milanesi implica essere italiani».
Se è vera la proprietà di «essere milanesi», è certamente vera anche la proprietà di «essere italiani», dal momento che l'insieme dei milanesi è un sottoinsieme dell'insieme degli italiani (**fig. 3**): «essere milanesi» è quindi una condizione *sufficiente* per «essere italiani». **Non** è vero invece che «essere milanesi» è una condizione *necessaria* per «essere italiani», poiché ci sono italiani che non sono milanesi.
La proprietà di «essere italiani», invece, è una condizione *necessaria* per «essere milanesi»: infatti non esistono milanesi che non siano italiani (escludendo ovviamente gli stranieri che vivono a Milano!).

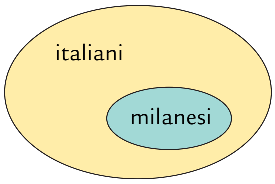


Figura 3

ESEMPIO

Riscriviamo le seguenti proposizioni utilizzando le espressioni «condizione necessaria» e «condizione sufficiente»:

a. «totalizzare un punteggio di 80 punti al test implica avere superato l'esame»;
b. «se un triangolo è equilatero allora è isoscele».

a. «Totalizzare un punteggio di 80 punti al test è condizione sufficiente per superare l'esame»

oppure:

«il fatto di avere superato l'esame è condizione necessaria per avere totalizzato al test un punteggio di 80 punti»

b. «Condizione sufficiente perché un triangolo sia isoscele è che esso sia equilatero»

oppure:

«il fatto che un triangolo sia isoscele è condizione necessaria perché sia equilatero»

La negazione di un'implicazione

Confrontando le tavole di verità di $p \Rightarrow q$ e di $\overline{p} \lor q$ (riportate qui sotto), si vede che $p \Rightarrow q$ è logicamente equivalente a $\overline{p} \lor q$.
Utilizzando questa equivalenza logica, è possibile ricavare una proposizione che equivale alla *negazione* della proposizione $p \Rightarrow q$.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \lor q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$$\begin{aligned} & \overline{p \Rightarrow q} = && \text{negazione di } p \Rightarrow q \\ = & \overline{\overline{p} \lor q} = && p \Rightarrow q = \overline{p} \lor q \\ = & \overline{\overline{p}} \land \overline{q} = && \text{leggi di De Morgan} \\ = & p \land \overline{q} && \text{legge della doppia negazione} \end{aligned}$$

Quindi:

La negazione di una proposizione del tipo $p \Rightarrow q$ equivale a $p \land \overline{q}$.

ESEMPIO

Neghiamo la proposizione: «se esco presto dal lavoro, vengo a cena da te».

Se poniamo p: «esco presto dal lavoro» e q: «vengo a cena da te», la proposizione assegnata è l'implicazione $p \Rightarrow q$.
In base a quanto abbiamo appena detto, la sua negazione è la proposizione:

$p \wedge \overline{q}$: «esco presto dal lavoro e non vengo a cena da te»

Proposizione inversa, contronominale e contraria

A partire dall'implicazione $p \Rightarrow q$, si possono costruire altre tre implicazioni:

- $q \Rightarrow p$ detta **inversa** di $p \Rightarrow q$
- $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ detta **contronominale** di $p \Rightarrow q$
- $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ detta **contraria** di $p \Rightarrow q$

In questo contesto, la proposizione $p \Rightarrow q$ viene detta implicazione **diretta**.

ESEMPIO

Data la proposizione: «Se 111 è un numero primo, allora non è divisibile per 11», determiniamo la sua inversa, la sua contronominale e la sua contraria.

La proposizione data è l'implicazione diretta $p \Rightarrow q$, essendo p la proposizione «111 è un numero primo» e q la proposizione «111 non è divisibile per 11». Abbiamo che:

- la proposizione *inversa*, $q \Rightarrow p$, è: «Se 111 non è divisibile per 11, allora è un numero primo»;
- la proposizione *contronominale*, $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, è : «Se 111 è divisibile per 11, allora non è un numero primo»;
- la proposizione *contraria*, $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$, è : «Se 111 non è un numero primo, allora è divisibile per 11».

In riferimento all'esempio precedente, la proposizione $p \Rightarrow q$ è *vera* mentre la sua *inversa*, $q \Rightarrow p$, risulta *falsa*; ciò indica che una proposizione e la sua inversa **non** sono logicamente equivalenti.
Si può invece dimostrare, mediante le tavole di verità, che l'implicazione *diretta* $p \Rightarrow q$ è equivalente alla sua *contronominale*, mentre l'implicazione *inversa* è equivalente alla sua *contraria*.

Prova tu

1. Date le proposizioni p: «4 è pari» e q: «4 è primo», esprimi a parole le proposizioni $p \Rightarrow q$, $\overline{p} \Rightarrow q$, $p \Rightarrow \overline{q}$ e determina il loro valore di verità.
2. Completa scrivendo, al posto dei puntini, «necessaria» o «sufficiente».
   a. «condizione .... perché un triangolo sia equilatero è che esso sia isoscele»
   b. «condizione .... perché un numero sia divisibile per 2 è che sia multiplo di 4»
3. Scrivi la negazione della proposizione: «se domani c'è il Sole, vengo con te al mare».
4. Costruisci e confronta le tavole di verità delle proposizioni $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ e $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. Verifica che $q \Rightarrow p$ non è equivalente a $p \Rightarrow q$, mentre $p \Rightarrow q$ equivale a $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ e $q \Rightarrow p$ equivale a $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$.

ESERCIZI a p. 27

4. La doppia implicazione

Il connettivo «se e solo se»

Consideriamo la proposizione

«se un triangolo è equilatero allora è isoscele»

La sua inversa è:

«se un triangolo è isoscele allora è equilatero»

Notiamo che, in questo caso, mentre la proposizione $p \Rightarrow q$ è *vera* (perché tutti i triangoli equilateri sono isosceli), la proposizione inversa è *falsa* (perché esistono triangoli isosceli che non sono equilateri).
In alcuni casi, tuttavia, può capitare che siano vere sia la proposizione $p \Rightarrow q$ sia la sua inversa.
Per esempio, è vera la proposizione

«se un triangolo è equilatero allora ha i tre angoli congruenti»

ed è vera anche la proposizione inversa:

«se un triangolo ha i tre angoli congruenti allora è equilatero»

In casi come questi si riassumono le due proposizioni $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ dicendo che «p si verifica **se e solo se** si verifica q»; in riferimento all'esempio precedente si dirà:

«un triangolo è equilatero **se e solo se** ha i tre angoli congruenti»

Il connettivo «**se e solo se**» è indicato con il simbolo «$\Leftrightarrow$» e il modo di comporre due proposizioni tramite tale connettivo viene chiamato **doppia implicazione**.
In base a quanto abbiamo detto:

$$p \Leftrightarrow q$$

è equivalente a

$$(p \Rightarrow q) \text{ e } (q \Rightarrow p)$$

Si assumerà perciò, come tavola di verità di $p \Leftrightarrow q$, quella di $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ che ora costruiamo:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La tavola di verità di $p \Leftrightarrow q$ è, quindi, la seguente:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Dalla tavola si deduce che:

Il connettivo «$\Leftrightarrow$» opera su una coppia di proposizioni p, q producendo la proposizione composta $p \Leftrightarrow q$ che risulta vera se e solo se p e q sono entrambe false o entrambe vere.

ESEMPI

Date le proposizioni p: «la Luna è una stella» e q: «Giove è un pianeta», esprimiamo a parole le proposizioni $p \Leftrightarrow q$ e $\overline{p} \Leftrightarrow q$; poi stabiliamo il loro valore di verità.

Proposizione in simboli	Proposizione a parole	Valore di verità
$p \Leftrightarrow q$	«la Luna è una stella se e solo se Giove è un pianeta»	p è *falsa* e q è *vera*, quindi: $p \Leftrightarrow q$ è falsa
$\overline{p} \Leftrightarrow q$	«la Luna non è una stella se e solo se Giove è un pianeta»	$\overline{p}$ è *vera* e q è *vera*, quindi: $\overline{p} \Leftrightarrow q$ è vera

I modi di leggere la doppia implicazione

Anche la proposizione $p \Leftrightarrow q$ (similmente a $p \Rightarrow q$) può venire letta in vari modi:

- p se e solo se q
- p equivale a q
- se p allora q e viceversa
- p è condizione necessaria e sufficiente per q

Per esempio, per esprimere la proposizione:

«un triangolo è equilatero se e solo se ha i tre angoli congruenti»

potremo in modo equivalente dire che:

- «per un triangolo, essere equilatero è equivalente ad avere tutti gli angoli congruenti»
- «se un triangolo è equilatero, allora ha tutti gli angoli congruenti e viceversa»
- «condizione necessaria e sufficiente perché un triangolo sia equilatero è che abbia i tre angoli congruenti»

Prova tu

1. Data la proposizione «se supero l'esame, ti invito a cena», scrivi la sua inversa.
2. Date le proposizioni p: «Venere è un pianeta» e q: «l'Acquario non è una costellazione», esprimi a parole le proposizioni $\overline{p} \Leftrightarrow q$ e $p \Leftrightarrow \overline{q}$ e determina il loro valore di verità.
3. Poni una crocetta in corrispondenza delle proposizioni che sono equivalenti a: «se decido di non venire al cinema, ti avverto».

a. «Se non ti avverto, vengo al cinema.» ☐
b. «Se vengo al cinema, non ti avverto.» ☐
c. «Vengo al cinema o ti avverto.» ☐
d. «Vengo al cinema se e solo se non ti avverto.» ☐

ESERCIZI a p. 29

5. Tautologie e regole di deduzione

Che cosa sono le tautologie? E le contraddizioni?

Consideriamo la frase «piove o non piove»: essa risulta ovviamente sempre vera, indipendentemente dal valore di verità delle singole proposizioni elementari che la compongono («piove» e «non piove»). Alle proposizioni che risultano sempre vere, o sempre false, si dà un nome particolare.

TAUTOLOGIE E CONTRADDIZIONI

Una proposizione composta si dice:

- una **tautologia** se risulta **sempre vera**, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni elementari che la compongono;
- una **contraddizione** se risulta **sempre falsa**, qualunque sia il valore di verità delle proposizioni elementari che la compongono.

La costruzione della tavola di verità di una proposizione composta permette di stabilire immediatamente se si tratta di una tautologia o di una contraddizione.

ESEMPI

Stabiliamo se le proposizioni $p \vee q$, $p \vee \overline{p}$, $p \wedge \overline{p}$ sono tautologie o contraddizioni.

Costruiamo le tavole di verità delle tre proposizioni.

$p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposizione $p \vee q$ non è né una tautologia né una contraddizione poiché non risulta né sempre vera, né sempre falsa.

$p \vee \overline{p}$

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
V	F	V
F	V	V

La proposizione $p \vee \overline{p}$ risulta sempre vera (V), qualunque sia il valore di verità di p, quindi si tratta di una *tautologia*.

$p \wedge \overline{p}$

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
V	F	F
F	V	F

La proposizione $p \wedge \overline{p}$ risulta sempre falsa (F), qualunque sia il valore di verità di p, quindi si tratta di una *contraddizione*.

Regole di deduzione

Uno dei problemi di cui si occupa la logica è quello di analizzare la correttezza di una deduzione. Esaminiamo un esempio classico di ragionamento che si trova su tutti i libri di filosofia.
Dalle due premesse

«Socrate è un uomo» [A]

e

«se Socrate è un uomo, allora Socrate è mortale» [B]

si deduce la conclusione:

«Socrate è mortale» [C]

Tutti conveniamo che l'enunciato [C] è stato dedotto correttamente dagli enunciati [A] e [B].
Ciò che caratterizza la correttezza di un certo schema di ragionamento è l'indipendenza dai valori di verità delle proposizioni che lo compongono. Per esempio, dalle premesse: «Socrate è un uomo» e «se Socrate è un uomo, è immortale» potremmo, seguendo uno schema di ragionamento analogo al precedente, dedurre che «Socrate è immortale»: la *deduzione* è corretta, anche se il risultato della deduzione è chiaramente *falso* (perché era falsa una delle premesse).
In generale: una *regola di deduzione* si dice **valida** se porta a una deduzione corretta indipendentemente dai valori di verità delle proposizioni coinvolte nel ragionamento.
Nella tabella seguente presentiamo alcuni esempi di applicazione di tre regole di deduzione valide che utilizziamo abitualmente, fornendo in parallelo le formalizzazioni di tali ragionamenti: in logica si danno a queste tre regole nomi particolari: regola del **modus ponens**, regola del **modus tollens** e legge del **sillogismo ipotetico**.

Regola	Esempio	Formalizzazione	Schema del ragionamento in simboli
Modus ponens	PREMESSE «Socrate è un uomo» «se Socrate è un uomo allora Socrate è mortale» CONCLUSIONE **«Socrate è mortale»**	PREMESSE p $p \Rightarrow q$ CONCLUSIONE q	$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ \hline q \end{array}$
Modus tollens	PREMESSE «se Socrate è un uomo allora Socrate è mortale» «Socrate è immortale» CONCLUSIONE **«Socrate non è un uomo»**	PREMESSE $p \Rightarrow q$ $\overline{q}$ CONCLUSIONE $\overline{p}$	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \qquad \overline{q} \\ \hline \overline{p} \end{array}$
Legge del sillogismo ipotetico	PREMESSE «se Mario vince la partita allora esce con noi stasera» «se Mario esce con noi stasera allora ti telefono» CONCLUSIONE **«se Mario vince la partita allora ti telefono»**	PREMESSE $p \Rightarrow q$ $q \Rightarrow r$ CONCLUSIONE $p \Rightarrow r$	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$

Come si può controllare se una regola di deduzione è *valida*?
Si potrebbe dimostrare che una regola di deduzione, la quale a partire dalle *premesse* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ porta a dedurre una certa *conclusione* Q, è *valida* se e solo se la proposizione

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q$$

è una *tautologia*.
Le regole di deduzione, dunque, si fondano sulle tautologie.
Per esempio, si potrebbe provare la validità delle regole di deduzione presentate nella tabella precedente dimostrando che le seguenti proposizioni sono tautologie (lasciamo a te la verifica per esercizio):

$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ Modus ponens

$((p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$ Modus tollens

$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ Legge del sillogismo ipotetico

A volte, soprattutto se un ragionamento è piuttosto articolato, può non essere immediato capire se è corretto. Per provare la validità di un ragionamento si può cercare di fare vedere che esso si basa sull'applicazione delle regole di deduzione note (modus ponens, modus tollens, legge del sillogismo ipotetico); per fare vedere, invece, che un ragionamento **non** è corretto, può essere utile rifarsi al modello insiemistico. Osserva i seguenti esempi.

Modi di dire

In alcuni testi, la legge del sillogismo ipotetico è chiamata «regola della catena».

Esempio di deduzione valida

Premesse

1. «se il ladro non aveva un complice, allora il ladro è un uomo»
2. «se il ladro è un uomo, allora è di alta statura»
3. «se il ladro è entrato dalla finestra, allora non è di alta statura»
4. «da un sopralluogo si è potuto dedurre che il ladro è entrato dalla finestra»

Conclusione

«il ladro aveva un complice»

La deduzione è corretta, infatti:

a. dalle premesse 1 e 2, per la legge del *sillogismo ipotetico*, si deduce che:
«se il ladro non aveva un complice, allora è di alta statura»

b. dalle premesse 3 e 4, per la legge del *modus ponens*, si deduce che:
«il ladro non è di alta statura»

c. dalle due deduzioni:
- «se il ladro non aveva un complice, allora è di alta statura»
- «il ladro non è di alta statura»

per la legge del *modus tollens*, si deduce che:
«il ladro aveva un complice»

Esempio di deduzione non valida

Premesse

1. «se una persona fa parte di una squadra di calcio, allora si allena tutti i giorni»
2. «Paolo si allena tutti i giorni»

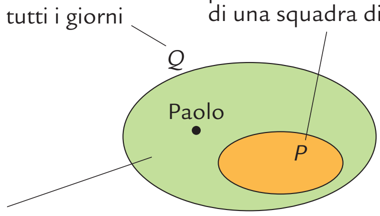
Conclusione

«Paolo fa parte di una squadra di calcio»

Sia P l'insieme delle persone che fanno parte di una squadra di calcio e Q l'insieme delle persone che si allenano tutti i giorni.

In base alla premessa 1, ogni persona che fa parte di una squadra di calcio si allena tutti i giorni, quindi $P \subseteq Q$; in base alla premessa 2, Paolo appartiene all'insieme Q.

Tuttavia, come indicato nella figura qui sotto, Paolo potrebbe appartenere all'insieme $Q - P$, cioè all'insieme delle persone che si allenano tutti i giorni, ma non fanno parte di alcuna squadra di calcio. Pertanto la deduzione **non** è valida.



Prova tu

1. Dalle premesse «non vado al lavoro in auto», «se piove, vado al lavoro in auto», si deduce che «non piove». È corretto?
☐ Sì, in base alla legge del .... ☐ No
2. Dalle premesse «se piove, il cielo è nuvoloso», «oggi non piove», si deduce che «oggi il cielo non è nuvoloso». È corretto?
☐ Sì, in base alla legge del .... ☐ No

ESERCIZI a p. 31

6. Problemi di logica

Concludiamo questo approfondimento proponendo alcuni problemi di logica. Rientrano in questa categoria una grande varietà di problemi, di tipologie diverse (problemi classici, paradossi, ragionamenti di cui trovare gli errori, giochi ecc.), perciò non è facile suggerire metodi che possano essere applicati proficuamente a tutti. Ci limitiamo a esemplificare, tramite due problemi, due tipi di approccio che si rivelano spesso utili.

PROBLEMA 1 Le amiche di Paolo

Supponiamo di sapere che le seguenti tre proposizioni sono tutte vere:

a. Paolo è amico di Lucia o di Barbara;
b. se Paolo è amico di Lucia, allora è amico anche di Barbara;
c. se Paolo non è amico di Barbara, allora è amico di Lucia.

Si può stabilire di chi è amico Paolo?

FAMILIARIZZIAMO CON IL PROBLEMA

Una strategia utile per risolvere molti problemi di logica è quella di *formalizzarli*, in modo da poter poi applicare loro gli strumenti che abbiamo introdotto in questa Unità (tavole di verità, teoria dell'equivalenza tra proposizioni, regole di deduzione ecc.). È questo il caso del problema che stiamo esaminando.

COSTRUIAMO IL MODELLO DEL PROBLEMA

Indichiamo con p la proposizione «Paolo è amico di Lucia» e con q la proposizione «Paolo è amico di Barbara». Il problema ci dice che sono *vere* le tre proposizioni:

$$p \vee q \qquad p \Rightarrow q \qquad \overline{q} \Rightarrow p \qquad [*]$$

Per scoprire in corrispondenza di quali valori di verità di p e q le tre proposizioni [*] risultano contemporaneamente vere, possiamo costruire le loro tavole di verità; dalle informazioni dedotte dalle tavole di verità stabiliremo (se possibile) di chi è amico Paolo.

COSTRUIAMO LE TAVOLE DI VERITÀ

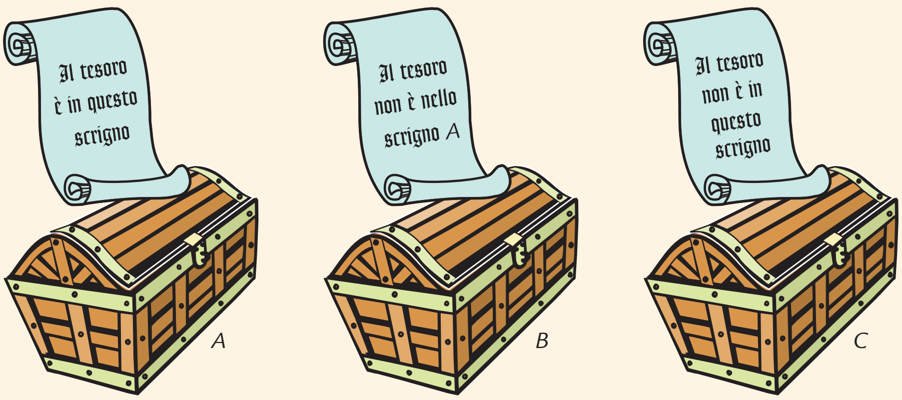
p	q	$\overline{q}$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow p$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F

Come si vede dalla tabella, gli unici casi in cui tutte e tre le proposizioni [*] sono vere sono i due in rosso. In entrambi i casi q è vera, mentre p è vera in un caso e falsa nell'altro.

RISPONDIAMO

Le tavole di verità mostrano che se le tre proposizioni [*] sono vere, allora q deve necessariamente essere vera, quindi possiamo affermare che Paolo è amico di Barbara.
La proposizione p invece può essere vera o falsa, dunque non è possibile stabilire se Paolo sia o meno amico di Lucia: entrambe le eventualità sono compatibili con le informazioni assegnate.

PROBLEMA 2 Lo scrigno e il tesoro



Sapendo che al massimo una delle affermazioni relative agli scrigni è vera, è possibile stabilire quale scrigno contiene il tesoro?

FAMILIARIZZIAMO CON IL PROBLEMA

Non è facile a prima vista indovinare lo scrigno che contiene il tesoro.
Una strategia per risolvere il problema è quella di esaminare una a una tutte le possibili alternative che possono presentarsi e scartare quelle che portano a delle contraddizioni.

COSTRUIAMO IL MODELLO DEL PROBLEMA

Indichiamo con *a*, *b* e *c* le tre proposizioni scritte sulle pergamene poste sopra a ciascuno scrigno, ossia:

- *a* è la proposizione «il tesoro è nello scrigno *A*»;
- *b* è la proposizione «il tesoro non è nello scrigno *A*»;
- *c* è la proposizione «il tesoro non è nello scrigno *C*».

Riportiamo in una tabella tutti i possibili valori di verità delle tre proposizioni *a*, *b* e *c* (la tabella è analoga alle prime tre colonne della tavola di verità di una proposizione composta formata da tre proposizioni elementari).

a	*b*	*c*
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Si tratterà ora di esaminare ciascuno di questi otto casi, escludendo di volta in volta quelli incompatibili con le ipotesi.

EFFETTUIAMO IL RAGIONAMENTO PER ESCLUSIONE

Il testo del problema ci dice che *al massimo una* delle proposizioni *a*, *b* e *c* è vera, perciò dobbiamo scartare le prime quattro possibilità colorate in rosso [*] nella tavola seguente, perché in contraddizione con questa ipotesi. Inoltre, poiché *a* e *b* sono una la negazione dell'altra, **non** possono essere entrambe false, quindi dobbiamo scartare le possibilità in rosso delle ultime due righe [**].

a	*b*	*c*	
V	V	V	[*]
V	V	F	[*]
V	F	V	[*]
V	F	F	
F	V	V	[*]
F	V	F	
F	F	V	[**]
F	F	F	[**]

Restano da analizzare solo le due possibilità in nero nella tavola qui sopra.

- **Prima possibilità: *a* è vera; *b* è falsa; *c* è falsa**

La proposizione *a* è vera, quindi il tesoro dovrebbe essere nello scrigno *A*.
Ma la proposizione *c* è falsa, quindi il tesoro dovrebbe essere anche nello scrigno *C*.
Si ha una contraddizione, quindi questa possibilità è da scartare.

- **Seconda possibilità: *a* è falsa; *b* è vera; *c* è falsa**

La proposizione *a* è falsa, quindi il tesoro non è in *A*.
La proposizione *c* è falsa, quindi il tesoro è in *C*.
La proposizione *b* è vera: infatti il tesoro è in *C*.
Questa possibilità è corretta.

RISPONDIAMO

Il tesoro è nello scrigno *C*.

L'approccio utilizzato in quest'ultimo problema è utile in svariate situazioni, per cui ti invitiamo a cercare di comprenderlo a fondo. Presta attenzione in particolare al fatto che occorre sempre esaminare *tutte* le possibile alternative (anche quando se ne fosse già trovata una plausibile): infatti un problema può anche non ammettere soluzioni o ammetterne più di una.

PER SAPERNE DI PIÙ **Il ragionamento per assurdo**

Nella risoluzione del Problema 2 abbiamo utilizzato il seguente schema di ragionamento: siamo partiti da una premessa p (cioè da una delle otto eventualità possibili) e abbiamo dimostrato che essa porta a una contraddizione, cioè a una proposizione del tipo $q \wedge \overline{q}$.
Di qui abbiamo dedotto che allora la premessa p non può sussistere, quindi è da scartare.
La validità di questa regola di deduzione si può dimostrare provando che la proposizione:

$$(p \Rightarrow (q \wedge \overline{q})) \Rightarrow \overline{p}$$

è una *tautologia*.
Questo schema di ragionamento è alla base delle cosiddette **dimostrazioni per assurdo**, che avremo occasione di approfondire nello studio della geometria.

Prova tu

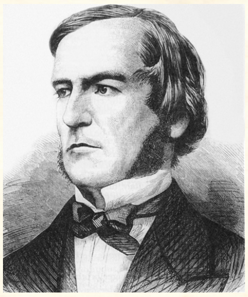
1. Supponiamo di sapere che le due seguenti proposizioni sono vere:
   a. se Paolo è amico di Lucia, allora è amico anche di Barbara;
   b. se Paolo è amico di Barbara, allora non è amico di Lucia.
   Si può stabilire di chi è amico Paolo?
2. Un'isola è abitata da due tipologie di individui: i cavalieri, che dicono sempre la verità, e i furfanti, che mentono sempre. Supponi di incontrare tre abitanti dell'isola, che indichiamo con A, B e C; A afferma: «Siamo tutti furfanti» e B: «Solo uno di noi è cavaliere». Puoi stabilire se A, B e C sono furfanti o cavalieri?

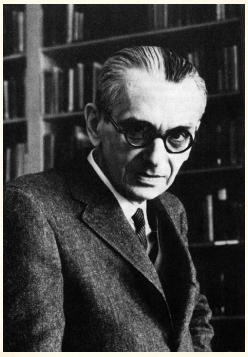
ESERCIZI a p. 33

MATEMATICA NELLA STORIA

La logica da Aristotele a Gödel

In questo approfondimento sono stati presentati alcuni elementi di *logica matematica*.
Il primo studioso che si occupò di logica fu il filosofo greco **Aristotele** (384-322 a.C.).
Fino al Cinquecento la logica restò sostanzialmente entro i confini tracciati da Aristotele; la preoccupazione fu soprattutto quella di preservarne, tradurne e approfondirne i testi.
Nonostante gli innovativi studi svolti nella seconda metà del Seicento dal filosofo e scienziato tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), i manuali di logica su cui studiarono i filosofi del Settecento e degli inizi dell'Ottocento rimasero semplici rielaborazioni della logica aristotelica.
Un notevole passo avanti negli studi di logica fu dovuto al matematico inglese **George Boole** (1815-1864), che sviluppò le idee di Leibniz: Boole trattò le proposizioni con simboli algebrici e sviluppò una vera e propria «algebra» delle proposizioni (algebra di Boole), che ha trovato, come abbiamo accennato nella Scheda del par. 3, sorprendenti applicazioni nella progettazione dei circuiti.
Nel Novecento, un risultato di fondamentale importanza nel campo della logica fu il cosiddetto *teorema dell'incompletezza* (1931), dimostrato da **Kurt Gödel** (1906-1978), matematico di origine ceca: esso esprime, a grandi linee, che all'interno di ogni teoria matematica esistono delle proposizioni «indecidibili», delle quali cioè non si può dimostrare né la verità né la falsità.
Gli sviluppi delle ricerche più recenti nel campo della logica hanno, infine, prodotto numerose applicazioni nello studio dei *linguaggi dei calcolatori*.


George Boole


Kurt Gödel

In libreria e in rete

Piergiorgio Odifreddi, *Le menzogne di Ulisse*, Longanesi.
Piergiorgio Odifreddi, *Il diavolo in cattedra. La logica matematica da Aristotele a Godel*, Einaudi.
Berto Francesco, *Tutti pazzi per Godel*, Laterza.
http://plus.maths.org/issue39/features/dawson/index.html

Esercizi

1. La negazione, la congiunzione e la disgiunzione

TEORIA a p. 1

Esercizi preliminari

1 **Vero o falso?**

a. se p è vera e q è falsa, le proposizione $p \vee q$ è vera V F

b. se p è vera e q è falsa, la proposizione $p \wedge q$ è vera V F

c. se $p \vee q$ è vera, allora necessariamente q è vera V F

d. se $p \wedge q$ è vera, allora necessariamente q è vera V F

e. se $\overline{p}$ è vera, allora necessariamente p è falsa V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

Test

2 Se p è la proposizione «15 è un numero dispari» e q è la proposizione «15 è un numero primo», la proposizione «15 è un numero dispari e non è un numero primo» è espressa in simboli da:

A $p \vee \overline{q}$ B $\overline{p} \vee q$ C $p \wedge \overline{q}$ D $\overline{p} \wedge q$

3 Se la proposizione $p \vee q$ è vera allora:

A p e q devono essere entrambe vere

B almeno una delle due proposizioni, p o q, deve essere vera, ma non possono essere vere sia p sia q

C almeno una delle due proposizioni, p o q, deve essere vera, potendo essere vere sia p sia q

D p e q devono essere entrambe false

4 Sia p una proposizione *vera* e q una proposizione *falsa*. Quale delle seguenti proposizioni è *vera*?

A $p \wedge q$ C $\overline{p} \vee q$

B $p \wedge \overline{q}$ D Nessuna delle precedenti

5 Sia p una proposizione *falsa* e q una proposizione *falsa*. Quale delle seguenti proposizioni è *vera*?

A $p \wedge \overline{q}$ C $p \vee q$

B $\overline{p} \wedge q$ D Nessuna delle precedenti

Dalle parole ai simboli e viceversa

6 **ESERCIZIO SVOLTO**

Indichiamo ogni proposizione elementare che compare nelle seguenti proposizioni con una lettera e riscriviamo le proposizioni in forma simbolica.

a. **«non vado in palestra»**

b. **«vado in piscina o in palestra»**

c. **«vado in piscina e non vado in palestra»**

d. **«non vado né in piscina né in palestra»**

Indichiamo con p la proposizione «vado in piscina» e con q la proposizione «vado in palestra».
Esaminiamo ciascuna delle proposizioni date in modo da evidenziare le proposizioni p e q e i connettivi che vi compaiono; poi traduciamo la proposizione in simboli.

Esame delle proposizioni	Traduzione in simboli
«$\underbrace{\text{non}}_{\text{non}}$ $\underbrace{\text{vado in palestra»}}_{q}$	$\overline{q}$
«$\underbrace{\text{vado in piscina}}_{p}$ $\underbrace{\text{o}}_{\text{o}}$ $\underbrace{\text{in palestra»}}_{q}$	$p \vee q$
«$\underbrace{\text{vado in piscina}}_{p}$ $\underbrace{\text{e}}_{\text{e}}$ $\underbrace{\text{non vado in palestra»}}_{\text{non } q}$	$p \wedge \overline{q}$
La proposizione **d** equivale a: «$\underbrace{\text{non vado in piscina}}_{\text{non } p}$ $\underbrace{\text{e}}_{\text{e}}$ $\underbrace{\text{non vado in palestra»}}_{\text{non } q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$

Indica con una lettera ogni proposizione elementare che compare nelle seguenti proposizioni composte e riscrivi la proposizione composta in forma simbolica.

7 Resto a casa e guardo la televisione.

8 Vado al mare o al lago.

9 Non è vero che 6 è pari e divisibile per 5.

10 Non vado in piscina ma vado in palestra.

11 Vengo alla tua festa o vado al cinema.

12 È nuvoloso ma non piove.

13 ESERCIZIO SVOLTO

Date le proposizioni:

p: «il ladro è entrato dalla finestra»
q: «il ladro aveva un complice»
r: «il furto è avvenuto dopo la mezzanotte»

scriviamo a parole le seguenti proposizioni composte:

$p \wedge q \qquad \overline{p} \vee \overline{r} \qquad \overline{q \wedge r}$

Otteniamo che:

- $p \wedge q$ significa «il ladro è entrato dalla finestra e aveva un complice»
- $\overline{p} \vee \overline{r}$ significa «il ladro non è entrato dalla finestra oppure il furto non è avvenuto dopo la mezzanotte»
- $\overline{q \wedge r}$ significa «non è vero che il ladro aveva un complice e che il furto è avvenuto dopo la mezzanotte»

Date le proposizioni p e q, esprimi a parole le proposizioni indicate sotto in simboli.

14 p: «piove», q: «vado al lavoro in macchina»

$p \wedge q \qquad \overline{p} \vee q$

15 p: «ho 6 in tutte le materie», q: «sono promosso»

$\overline{p} \wedge \overline{q} \qquad \overline{p \wedge q}$

16 p: «77 non è primo», q: «77 è divisibile per 11»

$p \wedge q \qquad \overline{p} \vee q$

17 Date le proposizioni:

p: «Paolo fa i compiti»
q: «Paolo guarda la televisione»
r: «Paolo gioca a tennis»

riscrivi a parole le seguenti proposizioni espresse in forma simbolica:

$(p \vee q) \wedge \overline{r} \qquad (\overline{p} \wedge r) \vee q$

18 Date le proposizioni:

p: «il testimone è attendibile»
q: «il ladro è entrato dalla finestra»
r: «il ladro è un uomo di bassa statura»

riscrivi a parole le seguenti proposizioni espresse in forma simbolica:

$\overline{p} \vee (q \wedge r) \qquad p \wedge (q \vee r)$

19 Date le proposizioni:

p: «Marte è un pianeta»
q: «la Luna è una stella»

completa la seguente tabella.

A parole	In simboli
....	$p \wedge q$
non è vero che Marte è un pianeta e che la Luna è una stella	....
....	$p \wedge \overline{q}$
Marte non è un pianeta o la Luna non è una stella	....

Il valore di verità delle proposizioni contenenti i connettivi «e», «o», «non»

20 ESERCIZIO SVOLTO

Stabiliamo il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. **«i numeri naturali sono pari o sono numeri razionali»**

b. **«i triangoli equilateri sono isosceli e sono equiangoli»**

a. Chiamiamo p la proposizione «i numeri naturali sono pari» e q la proposizione «i numeri naturali sono numeri razionali»: allora la proposizione data non è altro che $p \vee q$.
Dal momento che una delle due proposizioni, q, è vera, la proposizione data è *vera*.
b. Posto p: «i triangoli equilateri sono isosceli» e q: «i triangoli equilateri sono equiangoli», la proposizione data non è altro che $p \wedge q$.
Poiché sia p sia q sono vere, anche la proposizione data è *vera*.

21 Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. tutti i quadrati sono rettangoli e tutti i rettangoli sono rombi V F
b. 5 è minore o uguale a 6 V F
c. Milano non è in Italia o Roma è in Europa V F
d. 20 è maggiore di 21 o 17 è un numero dispari V F
e. il gatto non è un mammifero e Napoli è una città italiana V F

[Solo 3 proposizioni sono vere]

22 Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. non ci sono giorni della settimana che iniziano per f o non ci sono mesi dell'anno che iniziano per f V F
b. 12111 è primo o 17 è dispari V F
c. Firenze è il capoluogo della Toscana e Bologna è in Toscana V F
d. 12 è maggiore o uguale a 12 V F
e. 20 è maggiore di 19 e 21 è un numero primo V F

[Solo 3 proposizioni sono vere]

23 Siano p: «Bologna è in Lombardia» e q: «Torino è in Piemonte». Completa la seguente tabella, assegnando il valore di verità a ciascuna proposizione.

Proposizione	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p} \wedge q$	$p \vee \overline{q}$	$\overline{p \vee q}$
Valore di verità	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

24 Siano p: «i mesi dell'anno sono 12» e q: «i giorni della settimana sono 7». Completa la seguente tabella, assegnando il valore di verità a ciascuna proposizione.

Proposizione	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p} \wedge q$	$p \vee \overline{q}$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p \vee \overline{q}}$
Valore di verità	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

25 Siano p: «111 è un numero primo» e q: «21 non è multiplo di 7». Completa la seguente tabella, assegnando il valore di verità a ciascuna proposizione.

Proposizione	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p} \wedge q$	$p \vee \overline{q}$	$\overline{p \vee q}$
Valore di verità	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

26 Siano p: «3333 è divisibile per 11» e q: «3333 è multiplo di 9». Completa la seguente tabella, assegnando il valore di verità a ciascuna proposizione.

Proposizione	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p} \wedge q$	$p \vee \overline{q}$	$\overline{p \vee q}$
Valore di verità	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

27 Supponiamo che p sia una proposizione *vera*, q sia una proposizione *falsa* ed r sia una proposizione *vera*. Completa scrivendo, al posto dei puntini, dei simboli opportuni ($\vee$, $\wedge$, p, q, r), in modo da ottenere proposizioni *vere*.

a. $(p \wedge q)$ ..... r
b. $(p$ ..... $r) \wedge r$
c. $\overline{p}$ ..... r
d. $($..... $\wedge \overline{q}) \vee \overline{r}$

28 Supponiamo che p sia una proposizione *falsa*, q sia una proposizione *vera* ed r sia una proposizione *falsa*. Completa scrivendo, al posto dei puntini, dei simboli opportuni ($\vee$, $\wedge$, p, q, r), in modo da ottenere proposizioni *false*.

a. $(p \wedge q)$ ..... $\overline{r}$
b. $(p \vee q) \wedge$ .....
c. $\overline{p} \wedge$ .....
d. $($..... $\wedge q) \vee$ .....

2. Le tavole di verità e l'equivalenza di proposizioni

TEORIA a p. 3

Esercizi preliminari

29 **Vero o falso?**

a. nella tavola di verità di una proposizione composta di due proposizioni elementari, le righe che esprimono le possibili combinazioni vero/falso delle proposizioni elementari sono quattro V F
b. nella tavola di verità di una proposizione composta di tre proposizioni elementari, le righe che esprimono le possibili combinazioni vero/falso delle proposizioni elementari sono sei V F
c. le due proposizioni $p \wedge \overline{q}$ e $\overline{p} \vee q$ sono equivalenti in base alla legge di De Morgan V F
d. due proposizioni composte equivalenti possono essere una vera e una falsa, in corrispondenza degli stessi valori di verità delle proposizioni elementari che compongono le due proposizioni V F

30 Associa a ogni proposizione composta la corrispondente tavola di verità.

a. $\overline{p} \vee q$ **b.** $\overline{p} \wedge q$ **c.** $\overline{p} \vee \overline{q}$ **d.** $\overline{p} \wedge \overline{q}$

A.

p	q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

B.

p	q	?
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

C.

p	q	?
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

D.

p	q	?
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

La costruzione di una tavola di verità

31 ESERCIZIO GUIDATO

Costruisci la tavola di verità della proposizione $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$, dove p e q sono proposizioni elementari.

La tabella che devi compilare, per costruire la tavola di verità di $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$, è la seguente.

p	q	$\bar{q}$	$p \vee q$	$p \vee \bar{q}$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$
V	V	.....	.....	.....	.....
V	F	.....	.....	.....	.....
F	V	F	V	F	F
F	F	.....	.....	.....	.....

In queste due colonne si pongono tutti i possibili valori di verità di p e q

La colonna di $\bar{q}$ serve per determinare la tavola di verità di $p \vee \bar{q}$; le colonne di $p \vee q$ e di $p \vee \bar{q}$ servono a determinare la tavola di verità di: $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$

Per esempio, se $p \vee q$ è V e $p \vee \bar{q}$ è F, allora $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$ è F

Costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni, essendo p e q due proposizioni elementari.

32 $p \vee \bar{q}$

33 $\bar{p} \wedge q$

34 $\overline{p \vee q}$

35 $\overline{p \wedge q}$

36 $(p \vee \bar{q}) \wedge p$

37 $(p \vee q) \wedge \bar{p}$

38 $(\bar{p} \wedge q) \vee p$

39 $(p \wedge \bar{q}) \vee \bar{p}$

40 $(\overline{p \vee q}) \vee (p \wedge q)$

41 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$

42 $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$

43 $(\bar{p} \wedge q) \vee (\overline{p \wedge q})$

44 ESERCIZIO GUIDATO

Costruisci la tavola di verità della proposizione

$$p \wedge (q \vee r)$$

essendo p, q ed r proposizioni elementari.

La tavola che bisogna costruire deve avere:

1. tre colonne, ciascuna di 8 righe, in cui si pongono tutti i possibili valori di verità per p, q ed r (le tre colonne in nero nella tavola impostata nella pagina seguente);
2. una quarta colonna (quella in azzurro) dove si pongono i valori di verità di $q \vee r$: questi valori di verità servono per determinare successivamente i valori di verità di $p \wedge (q \vee r)$;
3. un'ultima colonna (quella in rosso) dove si pongono i valori di verità di $p \wedge (q \vee r)$, deducendo tali valori di verità da quelli posti nelle colonne di p e di $q \vee r$, in base alle proprietà del connettivo $\wedge$.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	.....	.....
V	F	V	.....	.....
V	F	F	.....	.....
F	V	V	V	F
F	.....	.....	.....	.....
F	.....	.....	.....	.....
F	.....	.....	.....	.....

Inserisci i valori di verità mancanti al posto dei puntini e avrai ottenuto la tavola di verità di $p \wedge (q \vee r)$.

Costruisci le tavole di verità delle seguenti proposizioni, essendo *p*, *q* ed *r* proposizioni elementari.

45 $(\overline{p} \wedge q) \vee r$

46 $p \wedge (\overline{q} \vee r)$

47 $(p \vee q) \wedge \overline{r}$

48 $(\overline{p} \wedge q) \vee \overline{r}$

49 $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$

50 $(\overline{p \vee q}) \wedge r$

51 $(p \vee q) \vee (p \wedge r)$

52 $p \vee (\overline{q \wedge r})$

53 $(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge r)$

54 $(\overline{p} \vee q) \wedge r$

Proposizioni logicamente equivalenti

55 ESERCIZIO GUIDATO

Dimostra la seguente equivalenza logica:

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **(proprietà distributiva del connettivo $\wedge$ rispetto a $\vee$)**

Devi costruire, su di una medesima tabella, le tavole di verità di $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, quindi controllare che coincidano. La tabella da compilare è la seguente (prima completa le colonne in azzurro, poi quelle in rosso).

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	.....	.....	.....	.....	.....
V	F	V	.....	.....	.....	.....	.....
V	F	F	.....	.....	.....	.....	.....
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	.....	.....	.....	.....	.....
F	F	V	.....	.....	.....	.....	.....
F	F	F	.....	.....	.....	.....	.....

Dal momento che le due colonne in rosso sono ...., puoi dire che le due proposizioni $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ sono equivalenti.

Dimostra le seguenti equivalenze logiche.

56 $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

57 $p \wedge (p \vee q) = p$

58 $p \vee (p \wedge q) = p$

59 $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

60 $\overline{\overline{p} \vee q} = p \wedge \overline{q}$

61 $\overline{p \wedge \overline{q}} = \overline{p} \vee q$

62 $p \vee q = (\overline{p} \wedge q) \vee p$

63 $\overline{p} \vee q = (p \wedge q) \vee \overline{p}$

64 $\overline{p} \wedge \overline{q} = (p \vee \overline{q}) \wedge \overline{p}$

Per ciascuna delle seguenti coppie di proposizioni, stabilisci se sono logicamente equivalenti.

65 $p \vee q, \quad q \vee p$ [Sì]

66 $p \wedge q, \quad q \wedge p$ [Sì]

67 $\overline{p} \vee q, \quad p \vee \overline{q}$ [No]

68 $p \vee q, \quad \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$ [Sì]

69 $(p \vee q) \vee r, \quad p \vee (q \vee r)$ [Sì]

70 $(p \wedge q) \wedge r, \quad p \wedge (q \wedge r)$ [Sì]

71 $(p \wedge \overline{q}) \vee r, \quad \overline{p} \vee (\overline{q} \vee r)$ [No]

72 $\overline{p} \vee (q \vee p), \quad q \vee (p \vee \overline{q})$ [Sì]

Le leggi di De Morgan e le proprietà dei connettivi

Usando le leggi di De Morgan, nega le seguenti proposizioni.

73 «Paolo non studia e non lavora»

74 «$a \neq 1$ o $b = 1$»

75 «Paolo studia o gioca a tennis»

76 «$a = 0$ e $b = 10$»

77 «il numero n è primo o dispari»

78 «il numero n è maggiore o uguale al numero m»

79 «$0 < a < 10$»

80 **ESERCIZIO SVOLTO**

Dimostriamo, senza ricorrere alle tavole di verità, la seguente equivalenza logica:

$$\overline{\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})} = (\overline{\boldsymbol{p}} \wedge \overline{\boldsymbol{q}}) \vee (\overline{\boldsymbol{p}} \wedge \overline{\boldsymbol{r}})$$

Otteniamo che:

$$\overline{p \vee (q \wedge r)} =$$

$= \overline{(p \vee q) \wedge (p \vee r)} =$ Proprietà distributiva di $\vee$ rispetto a $\wedge$

$= \overline{(p \vee q)} \vee \overline{(p \vee r)} =$ Leggi di De Morgan

$= (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{r})$ Leggi di De Morgan

Dimostra, senza ricorrere alle tavole di verità, le seguenti equivalenze logiche.

81 $p \vee (p \wedge q) = p \wedge (p \vee q)$

82 $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) = (p \vee r) \wedge q$

83 $\overline{p \wedge (q \vee r)} = (\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r})$

84 $\overline{p \vee \overline{q}} = \overline{p} \wedge q$

85 $\overline{(p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{r}} = (\overline{p} \vee q) \vee r$

86 $\overline{(\overline{p} \vee q)} \vee r = (p \wedge \overline{q}) \vee r$

3. L'implicazione

TEORIA a p. 10

Esercizi preliminari

87 **Vero o falso?**

a. la proposizione $p \Rightarrow q$ è vera ogni qualvolta p è falsa V F
b. se la proposizione $p \Rightarrow q$ è vera, allora necessariamente p è vera V F
c. se la proposizione $p \Rightarrow q$ è falsa, allora necessariamente q è falsa V F
d. ogni proposizione è equivalente alla sua inversa V F
e. la proposizione $p \Rightarrow q$ esprime che «p è condizione necessaria per q» V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

88 Completa:

a. L'inversa della proposizione «se torno a casa, ti telefono» è «se ...., torno a ....»
b. La contronominale della proposizione «se torno a casa, ti telefono» è «se non ...., non ....»
c. La contraria della proposizione «se torno a casa, ti telefono» è «se non ...., non ....»

L'uso del connettivo «se ... allora»

Date le proposizioni

***p*: «il ladro è entrato dalla finestra»**

***q*: «il ladro aveva un complice»**

***r*: «il furto è avvenuto dopo la mezzanotte»**

scrivi in parole le seguenti proposizioni composte.

89 $\overline{p} \Rightarrow q$

90 $q \Rightarrow \overline{p}$

91 $(p \wedge q) \Rightarrow \overline{r}$

92 $(\overline{p} \wedge \overline{r}) \Rightarrow q$

93 $r \Rightarrow (p \vee q)$

94 $p \Rightarrow (q \wedge r)$

Siano *p*: «piove», *q*: «prendo l'ombrello», *r*: «vado al lavoro a piedi». Riscrivi in simboli le seguenti proposizioni espresse a parole.

95 Se piove, allora prendo l'ombrello.

96 Se vado al lavoro a piedi, allora prendo l'ombrello.

97 Se non piove, allora vado al lavoro a piedi.

98 Se non piove, allora non prendo l'ombrello e vado al lavoro a piedi.

99 Se piove o se vado al lavoro a piedi, allora prendo l'ombrello.

100 Se prendo l'ombrello o se non vado al lavoro a piedi, allora piove.

101 Stabilisci, ricordando la tavola di verità del connettivo «se ... allora», il valore di verità delle seguenti implicazioni.

a. se $5 + 5 = 10$, allora $5 + 5 + 5 = 20$ V F
b. se 1101 è primo, allora non è divisibile per 3 V F
c. se 4 è un numero dispari, allora 10 è maggiore di 12 V F
d. se 4 è maggiore di 3, allora il prodotto $4 \cdot 2$ è maggiore del prodotto $3 \cdot 2$ V F
e. se 3 è maggiore di 4, allora il prodotto $3 \cdot 3$ è minore del prodotto $4 \cdot 3$ V F

[Solo una affermazione è falsa]

102 ESERCIZIO SVOLTO

Tre proposizioni p, q ed r sono tali che p è *vera*, q è *falsa* ed r è *falsa*. Determiniamo il valore di verità della proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{r}$.

Costruiamo la tavola di verità.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\overline{r}$	$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{r}$
V	F	F	F	V	F

per ipotesi

p è V e q è F, quindi: $p \Rightarrow q$ è F

$p \Rightarrow q$ è F e $\overline{r}$ è V, quindi la loro congiunzione è F

La conclusione è che la proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{r}$ è falsa.

Tre proposizioni p, q ed r sono tali che p è *vera*, q è *falsa* ed r è *vera*. Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni composte.

103 $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{r}$

104 $(\overline{p} \Rightarrow q) \vee r$

105 $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{r}$

106 $(\overline{p} \Rightarrow q) \vee r$

107 $(p \Rightarrow q) \vee r$

108 $(p \Rightarrow q) \wedge r$

109 $(\overline{p} \Rightarrow q) \wedge (\overline{r} \Rightarrow q)$

110 Considera la proposizione composta:

$$((p \vee q) \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$$

Sapendo che p è vera, si può stabilire il valore di verità della proposizione data?

Costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni.

111 $p \Rightarrow \overline{q}$

112 $\overline{p \Rightarrow q}$

113 $\overline{p} \Rightarrow q$

114 $(p \vee q) \Rightarrow \overline{q}$

115 $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{p}$

116 $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

117 $(p \vee q) \Rightarrow r$

118 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

119 $(p \Rightarrow q) \wedge r$

Stabilisci se le seguenti coppie di proposizioni sono logicamente equivalenti.

120 $\overline{p \Rightarrow q}$, $\quad \overline{p} \wedge \overline{q}$ [Sì]

121 $\overline{p} \Rightarrow q$, $\quad p \vee \overline{q}$ [No]

122 $\overline{p \Rightarrow q}$, $\quad p \wedge \overline{q}$ [Sì]

123 $(p \vee q) \Rightarrow q$, $\quad \overline{p} \vee q$ [Sì]

124 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $\quad (p \wedge \overline{q}) \vee r$ [Sì]

125 $(p \Rightarrow q) \vee r$, $\quad (\overline{p} \vee q) \wedge r$ [No]

L'utilizzo delle espressioni «condizione necessaria» e «condizione sufficiente»

Completa inserendo al posto dei puntini «necessaria» o «sufficiente».

126 Condizione .... perché un numero sia divisibile per 4 è che sia divisibile per 8.

127 Condizione .... per essere promossi senza debito è avere 6 in tutte le materie.

128 Avere 8 in tutte le materie è condizione .... per essere promossi.

129 Essere napoletani è condizione .... per essere italiani.

130 Essere italiani è condizione .... per essere napoletani.

131 Condizione .... perché la macchina non si fermi è che ci sia benzina.

132 Condizione .... affinché un numero sia divisibile per 2 è che sia multiplo di 4.

133 Condizione .... affinché un numero sia primo è che non sia divisibile per 3.

134 La condizione $xy > 0$ è .... perché sia $x > 0$ e $y > 0$.

135 La condizione $x < 0$ e $y < 0$ è .... perché sia $xy > 0$.

Scrivi le seguenti proposizioni in forma equivalente utilizzando le espressioni «condizione necessaria» o «condizione sufficiente».

136 Se un quadrilatero è un rettangolo allora è un parallelogramma.

137 Se un quadrilatero è un parallelogramma allora i suoi lati opposti sono paralleli.

138 Essere romani implica essere italiani.

139 Dal fatto che un triangolo è equilatero segue che esso è isoscele.

140 Se ti sei iscritto, allora puoi partecipare al torneo.

141 Dal fatto che un numero è multiplo di 6, segue che è divisibile per 3.

La negazione di un'implicazione

142 ESERCIZIO GUIDATO

Nega la proposizione «se perdo la partita, allora non vengo alla festa stasera».

La proposizione data non è altro che l'implicazione $p \Rightarrow q$, dove

p: «perdo la partita» e q: «...»

Ricorda che la negazione della proposizione $p \Rightarrow q$ è la proposizione $p \wedge \overline{q}$.

Quindi la negazione della proposizione data è «perdo la partita e ....».

Scrivi le negazioni delle seguenti proposizioni.

143 Se ABC è un triangolo isoscele, allora è equilatero.

144 Se c'è brutto tempo, lo spettacolo viene rinviato.

145 Se il furto è avvenuto dopo la mezzanotte, allora il testimone ha mentito.

146 Se 99 è divisibile per 9, allora è divisibile per 3.

147 Spiega perché Un uomo viene processato per furto. Durante il processo l'accusa afferma: «Se l'imputato è colpevole, allora deve avere avuto un complice»; l'avvocato difensore controbatte: «Non è vero!». L'uomo a quel punto viene condannato. Sai spiegare perché?

Proposizione inversa, contronominale, contraria

148 ESERCIZIO GUIDATO

Data la proposizione: «Se piove, allora non vado al lavoro a piedi», scrivi la sua inversa.

Posto p: «Piove» e q: «Non vado al lavoro a piedi», la proposizione data non è altro che $p \Rightarrow q$.

La sua inversa, $q \Rightarrow p$, è: «Se non vado ...., allora ....».

Scrivi la proposizione inversa di ciascuna delle seguenti proposizioni.

149 Se vado alla festa, non vengo a cena da te.

150 Se vinco la partita, ti offro la cena.

151 Se supero l'esame, ti telefono.

152 Se il ladro aveva un complice, il furto può essere avvenuto dopo la mezzanotte.

153 Completa la seguente tabella, sull'esempio della seconda riga.

Proposizione	Valore di verità	Proposizione inversa	Valore di verità
Se un numero è primo, allora non è divisibile per 36.	V	Se un numero non è divisibile per 36, allora è primo.	F
Se un numero è divisibile per 6, allora è pari.	....	....	....
Se un numero è divisibile per 6, allora è divisibile per 2 e per 3.	....	....	....
Se un numero è divisibile per 5, allora la sua ultima cifra è 0.	....	....	....

154 Scrivi l'inversa, la contronominale e la contraria della proposizione: «Se nevica, andiamo a fare la settimana bianca».

155 Scrivi l'inversa, la contronominale e la contraria della proposizione: «Se non gioco a golf, vado a fare compere».

156 La *contronominale* di una proposizione è: «Se vado al cinema, allora non vado a teatro». Qual è la proposizione diretta?

157 La *contraria* di una proposizione è: «Se vado al cinema, allora non vado a teatro». Qual è la proposizione diretta?

4. La doppia implicazione

TEORIA a p. 14

Esercizi preliminari

158 **Vero o falso?**

a. la proposizione $p \Leftrightarrow q$ è vera ogni qualvolta p è vera V F

b. se la proposizione $p \Leftrightarrow q$ è vera, allora necessariamente p e q hanno lo stesso valore di verità V F

c. se la proposizione $p \Leftrightarrow q$ è falsa, allora necessariamente p e q sono false V F

d. $p \Leftrightarrow q$ equivale a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ V F

e. la proposizione $p \Leftrightarrow q$ esprime che «p è condizione necessaria e sufficiente per q» V F

f. Se p è vera e q è falsa, allora $p \Leftrightarrow q$ ha lo stesso valore di verità di $p \vee q$ V F

[3 affermazioni vere e 3 false]

159 **Vero o falso?**

a. per un numero naturale diverso da zero essere divisibile per 3 è condizione necessaria e sufficiente per non essere primo V F

b. per un numero naturale diverso da zero avere l'ultima cifra uguale a 2 è condizione necessaria e sufficiente per essere divisibile per 2 V F

c. per un numero naturale diverso da zero avere la somma delle cifre uguale a 6 è condizione sufficiente ma non necessaria per essere divisibile per 3 V F

d. per un numero naturale diverso da zero avere come ultima cifra 0 o 5 è condizione necessaria e sufficiente per essere divisibile per 5 V F

[2 affermazioni vere e 2 false]

Il connettivo «se e solo se»

Date le proposizioni *p*: «il ladro è entrato dalla finestra», *q*: «il ladro aveva un complice», *r*: «il testimone è attendibile», riscrivi a parole le seguenti proposizioni composte.

160 $r \Leftrightarrow \overline{p}(p \wedge q) \Leftrightarrow r$

161 $q \Leftrightarrow r(p \Leftrightarrow r) \wedge q$

162 $\overline{p \Leftrightarrow q} \quad r \Leftrightarrow (p \vee q)$

Siano *p*: «piove», *q*: «prendo l'ombrello», *r*: «vado al lavoro a piedi». Riscrivi in simboli le seguenti proposizioni espresse a parole.

163 Prendo l'ombrello se e solo se piove.

164 Vado al lavoro a piedi se e solo se non piove.

165 Non è vero che prendo l'ombrello se e solo se piove.

166 Non è vero che vado al lavoro a piedi se e solo se non piove.

167 Date le proposizioni p: «la Luna è una stella» e q: «il Sagittario è una costellazione», completa la seguente tabella assegnando il valore di verità a ciascuna proposizione.

Proposizione	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{p} \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \overline{q}$
Valore di verità	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

168 Date le proposizioni p: «Parigi non è in Italia», q: «il Piemonte confina con la Lombardia», completa la seguente tabella assegnando il valore di verità a ciascuna proposizione.

Proposizione	p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{p} \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow \overline{q}$
Valore di verità	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Costruisci le tavole di verità delle seguenti proposizioni.

169 $\overline{p} \Leftrightarrow q \qquad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

170 $\overline{p \Leftrightarrow q} \qquad (p \vee q) \Leftrightarrow r$

171 $(p \vee q) \Leftrightarrow \overline{q} \qquad (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$

172 $(p \Leftrightarrow q) \vee \overline{p} \qquad (p \Leftrightarrow q) \wedge r$

Verifica le seguenti equivalenze logiche.

173 $\overline{p \Leftrightarrow \overline{q}} = \overline{\overline{p} \Leftrightarrow q}$

174 $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) = p \Leftrightarrow q$

175 $(p \Leftrightarrow q) \vee \overline{q} = p \vee \overline{q}$

176 $(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{p} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

I modi di leggere la doppia implicazione

Esprimi le seguenti proposizioni in forma equivalente, utilizzando le espressioni «condizione necessaria», «condizione sufficiente» o «condizione necessaria e sufficiente».

177 Se si parcheggia in divieto di sosta, allora si può ricevere una multa.

178 Per un rettangolo, avere i lati congruenti equivale a essere un quadrato.

179 Essere nati a Reggio Calabria implica essere nati in Italia.

180 Se un triangolo ha i tre lati congruenti, allora ha i tre angoli congruenti e viceversa.

181 Avere vinto alla gara implica essere stati iscritti.

182 Vengo alla festa se mi accompagnano Alessandra e Marcello.

Esercizi riassuntivi sulle proposizioni e i connettivi

Test

183 Date le tre proposizioni p: «Vado a Milano», q: «Ti passo a prendere», r: «Ti vengo a trovare», qual è la traduzione in simboli della proposizione: «Se vado a Milano ti passo a prendere, oppure se non vado a Milano ti vengo a trovare»?

A $(p \vee \overline{p}) \Rightarrow (q \vee r)$

B $(p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \overline{q})$

C $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{(p \Rightarrow r)}$

D $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow r)$

184 Se p è *falsa*, quale delle seguenti proposizioni è certamente *vera*?

A $p \vee q$

B $p \wedge q$

C $p \Rightarrow q$

D $p \Leftrightarrow q$

185 Tre proposizioni p, q ed r sono tali che p è *vera*, q è *falsa* ed r è *falsa*. Una sola delle seguenti proposizioni è *vera*. Quale?

A $(p \vee q) \Rightarrow r$

B $(p \vee q) \wedge \overline{r}$

C $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow \overline{p})$

D $(p \wedge \overline{q}) \wedge r$

186 Due delle seguenti proposizioni esprimono, in modi formalmente diversi ma equivalenti, l'*inversa* della proposizione: «Se c'è bel tempo, vado a fare una passeggiata». Quali?

a. Se non vado a fare una passeggiata, non c'è bel tempo.
b. Se vado a fare una passeggiata, c'è bel tempo.
c. Condizione sufficiente perché vada a fare una passeggiata è che ci sia bel tempo.
d. Condizione necessaria perché vada a fare una passeggiata è che ci sia bel tempo.

187 Quale delle seguenti proposizioni è *equivalente* a: «Se piove, allora vado a scuola in autobus»?

A Se non vado a scuola in autobus, allora non piove.
B Se vado a scuola in autobus, allora piove.
C Se non piove, allora non vado a scuola in autobus.
D Nessuna delle precedenti.

188 Quale delle seguenti è la *negazione* della proposizione: «Se Paolo vive a Milano, allora vive in Lombardia»?

A Paolo non vive a Milano e non vive in Lombardia.
B Paolo non vive a Milano o non vive in Lombardia.
C Paolo vive a Milano o non vive in Lombardia.
D Paolo vive a Milano e non vive in Lombardia.

189 Per un numero naturale essere divisibile per 7 è condizione:

A necessaria (ma non sufficiente)
B sufficiente (ma non necessaria)
C necessaria e sufficiente
D né necessaria né sufficiente

affinché sia divisibile per 14.

190 Due delle seguenti proposizioni esprimono, in modi formalmente diversi ma equivalenti, la *negazione* della proposizione: «Condizione sufficiente per vincere il torneo è vincere la prima partita». Quali sono?

a. Vinco il torneo e non vinco la prima partita.
b. Vinco la prima partita e non vinco il torneo.
c. Non è vero che, se vinco la prima partita, allora vinco il torneo.
d. Non è vero che, se vinco il torneo, allora vinco la prima partita.

191 Determina la tavola di verità delle proposizioni:

a. $(\overline{p} \vee q) \Rightarrow q$
b. $(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)$

192 Verifica, nel modo che preferisci, che:

$(\overline{p} \vee q) \Rightarrow r = (p \wedge \overline{q}) \vee r$.

193 Considera la proposizione p: «Se vado a Parigi, non posso partecipare alla tua festa».

a. Se p è l'inversa della proposizione q, qual è q?
b. Se p è la contronominale della proposizione q, qual è q?
c. Se p è la contraria della proposizione q, qual è q?

5. Tautologie e regole di deduzione

TEORIA a p. 15

Esercizi preliminari

194 **Vero o falso?**

a. se una proposizione è una tautologia, non può mai essere falsa V F
b. $p \wedge \overline{p}$ è una tautologia V F
c. $p \vee \overline{p}$ è una contraddizione V F
d. «Oggi piove. Se oggi piove, non esco. Deduco che non esco». Si tratta di una deduzione corretta, basata sullo schema del modus ponens V F
e. «Oggi non piove. Se oggi piove, non esco. Deduco che esco». Si tratta di una deduzione corretta, basata sullo schema del modus tollens V F

[2 affermazioni vere e 3 false]

195 Associa a ogni deduzione lo schema di ragionamento corrispondente.

a. 15 è un numero divisibile per 3.
Se un numero è primo non è divisibile per 3.
Deduco che se un numero è primo, la somma delle sue cifre non è divisibile per 3.

b. Se un numero è primo, non è divisibile per 3.
Se un numero non è divisibile per 3, la somma delle sue cifre non è divisibile per 3.
Deduco che se un numero è primo, la somma delle sue cifre è divisibile per 3.

c. Se mi esercito, supererò l'esame.
Non mi sono esercitato.
Deduco che non supererò l'esame.

d. Se mi esercito, supererò l'esame.
Mi esercito.
Deduco che supererò l'esame.

A. Modus ponens
B. Modus tollens
C. Sillogismo ipotetico
D. Ragionamento non valido

Tautologie e contraddizioni

Verifica, utilizzando le tavole di verità, che le seguenti proposizioni sono tautologie.

196 $p \Rightarrow (p \vee q)$

197 $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

198 $(p \wedge q) \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$

199 $(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow \overline{q})$

Verifica, utilizzando le tavole di verità, che le seguenti proposizioni sono contraddizioni.

200 $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge q$

201 $(p \wedge \overline{q}) \wedge q$

202 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$

203 $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \overline{q})$

Per ciascuna delle seguenti proposizioni stabilisci se si tratta di una tautologia o di una contraddizione.

204 $(\overline{p} \Rightarrow q) \Rightarrow p$

205 $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

206 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \vee q)$

207 $(\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \Rightarrow (\overline{p} \wedge q)$

208 $(p \wedge q) \wedge (\overline{p} \wedge \overline{q})$

Gli schemi di ragionamento del modus ponens, del modus tollens e del sillogismo ipotetico

Applicando lo schema di ragionamento del *modus ponens*, del *modus tollens* o del *sillogismo ipotetico* completa le seguenti deduzioni, specificando ogni volta lo schema di ragionamento usato.

209 Piove.
Se piove allora prendo l'ombrello.

____

....

210 Ho vinto la partita.
Se vinco la partita, allora questa sera esco a cena.

____

....

211 Se Paolo fa parte della squadra di pallavolo, allora si allena tutti i giorni.
Paolo non si allena tutti i giorni.

____

....

212 Se il parallelogramma *ABCD* è un rettangolo, allora ha i quattro angoli retti.
Il quadrilatero *ABCD* non ha i quattro angoli retti.

____

....

213 Se vado alla riunione, allora torno a casa tardi.
Se torno a casa tardi, allora non vengo al cinema.

____

....

214 Se un numero è primo, allora non è divisibile per 6.
Se un numero non è divisibile per 6, allora non è divisibile per 12.

____

....

Riconosci su quali schemi di ragionamento si basano le seguenti deduzioni.

215 Il numero 17 è primo. Se 17 è primo, allora non è divisibile per 3. Se ne deduce che 17 non è divisibile per 3.

216 Se 1008 è primo, allora non è divisibile per 3. Il numero 1008 è divisibile per 3. Se ne deduce che 1008 non è primo.

217 Se torno a casa, allora vengo a trovarti. Se vengo a trovarti, allora mi fermo a cena da te. Se ne deduce che, se torno a casa, allora mi fermo a cena da te.

218 Condizione sufficiente perché sia promosso è che prenda un buon voto nell'interrogazione. Non sono stato promosso. Quindi, non ho preso un buon voto nell'interrogazione.

Validità di un ragionamento

Stabilisci se i seguenti ragionamenti sono validi.

219 ESERCIZIO SVOLTO

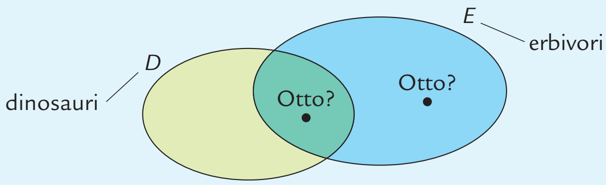
Alcuni dinosauri sono erbivori.
Otto è un erbivoro.

____

Otto è un dinosauro.

——

Osserva la figura qui sotto: abbiamo rappresentato, tramite diagrammi di Venn, l'insieme D dei dinosauri e l'insieme E degli erbivori. Dal momento che alcuni, ma non tutti, i dinosauri sono erbivori, abbiamo dovuto disegnare i due insiemi in modo che si intersechino.



In base alle premesse, Otto appartiene all'insieme E: non sappiamo, però, se appartiene all'insieme $D \cap E$ dei dinosauri erbivori o all'insieme $E - D$ degli animali erbivori che non sono dinosauri.
Dunque, in base alle premesse, non possiamo concludere che Otto sia necessariamente un dinosauro: la deduzione non è valida.

220 ESERCIZIO SVOLTO

Se Paolo fa parte della squadra di pallavolo, allora si allena tutti i giorni.
Se Paolo si allena tutti i giorni, allora si reca tutti i giorni in palestra.
Paolo non si reca tutti i giorni in palestra.

Paolo non fa parte della squadra di pallavolo.

Dalle premesse

«se Paolo fa parte della squadra di pallavolo, allora si allena tutti i giorni»,
«se Paolo si allena tutti i giorni, allora si reca tutti i giorni in palestra»,

si deduce, per la legge del *sillogismo ipotetico*, che:

«se Paolo fa parte della squadra di pallavolo, allora si reca tutti i giorni in palestra»

Da questa deduzione e dalla premessa «Paolo non si reca tutti i giorni in palestra», si deduce per la legge del *modus tollens*, che:

«Paolo non fa parte della squadra di pallavolo»

Pertanto il ragionamento è valido.

221 Se Antonella fa parte della banda, allora suona uno strumento musicale.
Antonella non fa parte della banda.

Antonella non suona strumenti musicali.
[Deduzione non valida]

222 Tutti i triangoli isosceli hanno un asse di simmetria.
Nessun triangolo con un asse di simmetria è scaleno.

Nessun triangolo isoscele è scaleno.
[Deduzione valida]

223 Se Maria viene alla mia festa di compleanno, allora alla festa non viene Paolo.
Se alla mia festa di compleanno viene Marco, allora viene anche Paolo.
Maria viene alla mia festa di compleanno.

Alla mia festa di compleanno non viene Marco.
[Deduzione valida]

224 Se appartieni alle prime 100 persone che prenotano il viaggio in Messico, allora partecipi al concorso.
Se partecipi al concorso, allora puoi vincere il viaggio gratis.
Hai vinto il viaggio gratis.

Appartieni alle prime 100 persone che hanno prenotato il viaggio in Messico. [Deduzione non valida]

225 Se l'anello che hai trovato non mi appartiene, allora non ha incisa la sigla G.M.
Riceverai la ricompensa se l'anello che hai trovato mi appartiene.
Non ricevi alcuna ricompensa.

L'anello che hai trovato non ha incisa la sigla G.M.
[Deduzione valida]

226 Se il ladro non è di bassa statura, aveva un complice.
Se è di bassa statura, allora è entrato dalla finestra.
Il ladro non è entrato dalla finestra.

Il ladro aveva un complice. [Deduzione valida]

227 Dalle premesse:

1. piove
2. se piove, non esco di casa
3. se vengo a trovarti, esco di casa
4. se non ti telefono, vengo a trovarti

si deduce che «ti telefono». Prova che si tratta di una deduzione valida.

6. Problemi di logica

TEORIA a p. 18

228 Quale delle seguenti proposizioni è equivalente a: «Se Marta non studia, allora guarda la televisione»?

A Se Marta guarda la televisione, allora non studia.
B Marta studia o guarda la televisione.
C Marta guarda la televisione e non studia. [B]

229 Quale delle seguenti proposizioni è equivalente a: «Anna non ha superato l'esame o esce a cena»?

A Anna ha superato l'esame e non esce a cena.
B Se Anna ha superato l'esame, allora esce a cena.
C Se Anna esce a cena, allora ha superato l'esame.

230 Supponiamo di sapere che le due seguenti proposizioni sono vere:

a. Andrea è amico di Anna o di Laura;
b. se Andrea è amico di Anna, allora è amico anche di Laura.

Si può stabilire di chi è amico Andrea?
[Andrea è certamente amico di Laura mentre non si può stabilire se sia amico di Anna]

231 Un'isola è abitata solo da furfanti (dicono sempre il falso) o cavalieri (dicono sempre la verità); un abitante dell'isola afferma: «Io sono amico di Linda»; «Se sono amico di Linda, sono amico anche di Barbara». È un cavaliere o un furfante?

232 Un'isola è abitata solo da furfanti (dicono sempre il falso) o cavalieri (dicono sempre la verità); un abitante dell'isola afferma: «Io sono un furfante, ma mio fratello non lo è». È un cavaliere o un furfante? E suo fratello? [Entrambi furfanti]

233 Tre uomini A, B, C furono processati e furono accertati i seguenti fatti:

a. Se A è innocente o B è colpevole, allora C è innocente;
b. Se A è innocente, allora C è colpevole.

L'ispettore chiese al sergente: «Lei riesce a dedurre da questi fatti chi è innocente e chi colpevole?». «No» – rispose il sergente – «ma le informazioni sono sufficienti per incriminare con certezza uno di essi». Di chi si può affermare che è colpevole senza sbagliare?

234 In un sacchetto ci sono alcune biglie. Maria dice: «Nel sacchetto ci sono in tutto tre biglie e sono nere». Luca dice: «Nel sacchetto ci sono due biglie nere e due biglie rosse». Giorgio dice: «Nel sacchetto ci sono solo biglie nere». Sapendo che uno solo dei tre ha mentito, quante biglie ci sono nel sacchetto? [Tre]

235 Un'isola è abitata solo da furfanti (dicono sempre il falso) o cavalieri (dicono sempre la verità); l'abitante A afferma: «Siamo tutti cavalieri» e l'abitante B: «Solo uno di noi è furfante». A è furfante o cavaliere? Si può stabilire se B è furfante o cavaliere?

236 Stai cercando di rispondere a un quesito a risposta multipla in cui una e una sola risposta è corretta. Sei giunto alle seguenti conclusioni:

a. se la risposta A è corretta, allora lo è anche la B;
b. se la risposta C non è corretta, allora non lo è anche la B;
c. se la risposta B non è corretta, allora non lo sono anche la D e la E.

Qual è la risposta corretta? [C]

237 Anna dice che Beatrice mente; Beatrice dice che Carla mente; Carla dice che Anna e Beatrice mentono. Chi dice la verità e chi mente?

238 Anna dice che Beatrice mente; Beatrice dice che Carla dice la verità; Carla dice che Anna e Beatrice mentono. Chi dice la verità e chi mente?
[Anna dice la verità, Beatrice mente, Carla mente]

239 Tre uomini, Antonio, Mario e Paolo, sono indiziati di furto ma uno solo è colpevole. Sottoposti a un interrogatorio dalla polizia Antonio dice di essere innocente, Mario dice che il colpevole è Paolo e Paolo sostiene che Mario mente. Sapendo che uno solo dice la verità, chi è il colpevole?

240 In un paese abitano solo briganti, che mentono sempre, e cavalieri, che dicono sempre la verità. Un giornalista intervista quattro abitanti: Arturo, Bernardo, Carlo e Dario, che fanno le seguenti dichiarazioni. Arturo: «Bernardo è un brigante»; Bernardo «Io sono l'unico cavaliere tra noi quattro»; Carlo: «Almeno uno tra Arturo e Dario è un brigante»; Dario: «Siamo 4 cavalieri». Quali dei quattro abitanti sono cavalieri e quali sono briganti?
[Dario e Bernardo sono briganti, Carlo e Arturo sono cavalieri]