AMMORTAMENTI A RATE ANTICIPATE

Sia l'operazione regolata secondo la legge della capitalizzazione composta con **tasso di interesse periodale** i <u>coerente con la periodicità di pagamento delle rate</u>.

$+S-R_0$	$-R_1$	$\dots$	$-R_{m-1}$
0	1	$\dots$	m-1

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}=\{S-R_0,-R_1,-R_2,\dots,-R_{m-1}\}/\{0,1,2,\dots,m-1\}$$

con $R_k=C_k+I_k \quad k=0,1,\dots,m-1$ **rate d'ammortamento**

$C_k \quad k=0,1,\dots,m-1$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=0}^{m-1}C_k=S$

I_k **quota interesse** maturata in $[k,k+1]$ è pagata in k, $k=0,1,\dots,m-1$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0,\boldsymbol{x})=0 \quad \Leftrightarrow \quad S-\sum_{k=0}^{m-1}R_k(1+i)^{-k}=0$$

Se $I_0>0$ e $C_0=0$ si ha l'**ammortamento con anticipazione degli interessi**.

Restituzione del capitale in unica soluzione e pagamento periodico degli interessi anticipati

Consideriamo il caso:

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0 \qquad\qquad C_m = S$$

in cui si ha la restituzione del capitale in unica soluzione, a scadenza.

Si ha

$$I_k = i \cdot S \cdot (1+i)^{-1} = d \cdot S \ , \qquad k = 0, \ldots, m-1;$$

quindi $R_k = d \cdot S \ , \quad k = 0, \ldots, m-1; \qquad R_m = S$

L'operazione finanziaria

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S - d \cdot S, -d \cdot S, \ldots, -d \cdot S, -S\} / \{0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$$

è equa.

Osservazione: interpretazione finanziaria per la formula

$$\ddot{a}_{\overline{m}|\, i} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{d} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 - d \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|\, i} - (1+i)^{-m} = 0$$

può essere interpretata come condizione di equità per l'operazione finanziaria

$$\{1-d, -d, -d, \ldots, -d, -1\} / \{0, 1, 2, \ldots, m-1, m\}$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k = 1, \ldots, m-1$.

Qual è la somma D_k^- da pagare in k, prima di pagare la rata esigibile in k, per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s} = \{S - d \cdot S, -d \cdot S, -d \cdot S, \ldots, -d \cdot S, -D_k^-\}/\{0, 1, 2, \ldots, k-1, k\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^k - (d \cdot S)\ddot{s}_{\overline{k|}\,i} - D_k^- = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_k^- = S$$

Si definisce D_k^- **debito residuo** in k prima del pagamento della rata R_k , $k = 0, \ldots, m$

$$D_k^- = S \qquad k = 0, \ldots, m$$

$$D_{m+1}^- = 0$$

Osservazione

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in t con $k-1<t<k$.

Qual è la somma X da pagare in t per chiudere l'operazione, mantenendo la condizione di equità?

Sia

$$\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}=\{S-d\cdot S,-d\cdot S,-d\cdot S,\ldots,-d\cdot S,-X\}/\{0,1,2,\ldots,k-1,t\}$$

l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(t,\boldsymbol{y})=0 \quad \Leftrightarrow \quad S(1+i)^t-(d\cdot S)s_{\overline{k|}\,i}(1+i)^{t-k+1}-X=0 \quad \Leftrightarrow \quad X=M(t,\boldsymbol{x})$$

Quindi il debito residuo coincide con il montante.

Si noti che

$$X=S(1+i)^{-(k-t)}.$$

Se $t=k$, l'estinzione avviene prima del pagamento della quota interesse in k e si ha $X=S$, ma non si ha più $X=M(k,\boldsymbol{x})$. Infatti, per definizione, la valutazione del montante in k è fatta dopo, e non prima, del pagamento della quota interesse esigibile in k.

Ammortamento progressivo a rate anticipate

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{m-1}\}/\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

con $R_k = C_k + I_k$ $\quad k = 0,1,\ldots,m-1$ **rate d'ammortamento**

C_k $\quad k = 0,1,\ldots,m-1$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=0}^{m-1} C_k = S$

I_k **quota interesse** maturata in $[k, k+1]$ e pagata in k, $k = 0,1,\ldots,m-1$

L'operazione deve soddisfare la condizione di equità:

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=0}^{m-1} R_k (1+i)^{-k} = 0$$

Si definisce D_k^- **debito residuo** in k prima del pagamento della rata R_k, $k = 0,1,\ldots,m-1$

$$D_k^- = S - \sum_{h=0}^{k-1} C_h = \sum_{h=k}^{m-1} C_h \qquad k = 1,\ldots,m-1$$

$$D_0^- = S, \quad D_m^- = 0$$

La quota interessi I_k matura nell'intervallo $[k, k+1]$ sul debito residuo D_{k+1}^-

$$I_k = d\, D_{k+1}^- \qquad k = 0,1,\ldots,m-1$$

Consideriamo il problema dell'**estinzione anticipata del prestito** in k con $k = 1, \dots, m-1$.
Qual è la somma X da pagare in k, prima di aver pagato la rata R_k, per chiudere l'operazione mantenendo la condizione di equità?

Sia $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \dots, -R_{k-1}, -X\}/\{0, 1, 2, \dots, k-1, k\}$ l'operazione finanziaria che descrive l'estinzione anticipata.

$$W(k, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \dots - R_{k-1}(1+i) - X = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad X = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \dots - R_{k-1}(1+i)$$

Per mantenere il legame tra debito residuo e montante anche negli ammortamenti a rate anticipate è necessario modificare la definizione di montante.

Si definisce **montante** in k dell'operazione di ammortamento $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$, valutato prima del pagamento della rata R_k esigibile in k

$$M^-(k, \boldsymbol{x}) = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \dots - R_{k-1}(1+i) \qquad k = 1, \dots, m$$

$$M^-(0, \boldsymbol{x}) = S$$

Quindi il montante è la somma da pagare per estinguere anticipatamente il prestito.

Se $k < t < k+1 \;\Rightarrow\; M^-(t, \boldsymbol{x}) = M(t, \boldsymbol{x})$ è la somma da pagare in t per estinguere il prestito.

Proviamo che il debito residuo

$$D_k^- = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{k-1} \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

coincide con il montante

$$M^-(k, \boldsymbol{x}) = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \ldots - R_{k-1}(1+i) \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

È inoltre

$$M^-(0, \boldsymbol{x}) = S = D_0^-$$

<u>Lemma</u>: relazione ricorrente per il montante

Si ha

$$M^-(k+1, \boldsymbol{x}) = \left(M^-(k, \boldsymbol{x}) - R_k\right)(1+i)$$

Proviamo che

$$M^-(k, \boldsymbol{x}) = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{k-1} = D_k^- \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

Si dimostra per induzione.

Base: $$M^{-}(m, \boldsymbol{x}) = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{m-1} = D_m^{-} = 0$$

Passo induttivo:

se $M^{-}(k+1, \boldsymbol{x}) = S - C_0 - \ldots - C_k = D_{k+1}^{-}$ allora $M^{-}(k, \boldsymbol{x}) = S - C_0 - \ldots - C_{k-1} = D_k^{-}$

Dalla relazione ricorrente per il montante, e sfruttando l'ipotesi induttiva, si ha

$$\begin{aligned} M^{-}(k, \boldsymbol{x}) &= D_{k+1}^{-}(1+i)^{-1} + R_k = D_{k+1}^{-} v + C_k + I_k \\ &= D_{k+1}^{-} v + C_k + d\, D_{k+1}^{-} = D_{k+1}^{-} v + C_k + i\, v\, D_{k+1}^{-} = D_{k+1}^{-} + C_k \end{aligned}$$

Poiché

$$D_{k+1}^{-} = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_k$$

si ha

$$M^{-}(k, \boldsymbol{x}) = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_k + C_k = S - C_0 - C_1 - \ldots - C_{k-1} = D_k^{-}$$

È così provato il passo induttivo.

Riassumendo,

$$I_k = d\, D_{k+1}^{-} \qquad k = 0,1,\dots,m-1$$

con

$$D_{k+1}^{-} = S - C_0 - C_1 - \dots - C_k\ , \qquad k = 0,1,\dots,m-1 \qquad \text{e} \qquad D_0^{-} = S$$

Inoltre

$$D_k^{-} = M^{-}(k,\boldsymbol{x}) \qquad k = 0,\dots,m$$

Essendo

$$M^{-}(k,\boldsymbol{x}) = (S - R_0)(1+i)^k - R_1(1+i)^{k-1} - R_2(1+i)^{k-2} - \dots - R_{k-1}(1+i) \qquad k = 1,\dots,m$$

$$M^{-}(0,\boldsymbol{x}) = S$$

Posto

$$V^{-}(k,\boldsymbol{x}) = -R_k - R_{k+1}(1+i)^{-1} - R_{k+2}(1+i)^{-2} - \dots - R_{m-1}(1+i)^{-(m-1-k)}$$

Essendo

$$W(k,\boldsymbol{x}) = M^{-}(k,\boldsymbol{x}) + V^{-}(k,\boldsymbol{x}) \qquad \text{e} \qquad W(k,\boldsymbol{x}) = 0$$

si ha

$$D_k^{-} = M^{-}(k,\boldsymbol{x}) = -V^{-}(k,\boldsymbol{x}) \qquad k = 0,\dots,m$$

Verifica della condizione di equità

Siano

$C_k \quad k=0,1,\ldots,m-1$ **quote capitale** tali che $\sum_{k=0}^{m-1} C_k = S$

$I_k \quad k=0,1,\ldots,m-1$ **quote interesse** con $I_k = d\, D_{k+1}^{-}$

essendo

$$D_k^{-} = S - \sum_{h=0}^{k-1} C_h = \sum_{h=k}^{m-1} C_h \qquad k=1,\ldots,m-1$$

$$D_0^{-} = S\,,\quad D_m^{-} = 0$$

il **debito residuo** in k prima del pagamento della rata R_k , $k=0,1,\ldots,m-1$

Risultano così assegnate le **rate d'ammortamento**

$$R_k = C_k + I_k \qquad k=0,1,\ldots,m-1$$

Proviamo che l'operazione

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{S-R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{m-1}\}/\{0,1,2,\ldots,m-1\}$$

soddisfa la condizione di equità: $W(0,\boldsymbol{x}) = 0 \iff S - \sum_{k=0}^{m-1} R_k (1+i)^{-k} = 0$

Dalla relazione ricorrente per il montante

$$M^{-}(k+1,\boldsymbol{x}) = \left(M^{-}(k,\boldsymbol{x}) - R_k\right)(1+i)$$

si ha

$$R_k = M^{-}(k,\boldsymbol{x}) - M^{-}(k+1,\boldsymbol{x})(1+i)^{-1} = D_k^{-} - D_{k+1}^{-}(1+i)^{-1}$$

quindi

$$R_k(1+i)^{-k} = D_k^{-}(1+i)^{-k} - D_{k+1}^{-}(1+i)^{-(k+1)}$$

Sommando si ottiene

$$\sum_{k=0}^{m-1} R_k(1+i)^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} D_k^{-}(1+i)^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} D_{k+1}^{-}(1+i)^{-(k+1)} = D_0^{-} - D_m^{-}(1+i)^{-m} = D_0^{-} = S$$

È così provata la condizione di equità.

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue anticipate e quote capitali pari rispettivamente a 30.000, 2.000, 10.000 e 8.000 euro.

Ammortamento con anticipazione degli interessi

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S - R_0, -R_1, -R_2, \ldots, -R_{m-1}\} / \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

con $R_0 = I_0$

$R_k = C_k + I_k \qquad k = 1, \ldots, m-1$

$C_0 = 0, \quad C_k \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$ tali che $\sum_{k=1}^{m-1} C_k = S$

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue con anticipazione degli interessi e quote capitali pari rispettivamente a 5.000, 10.000, 20.000 e 15.000 euro.

Esempio (ammortamento tedesco):

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue con anticipazione degli interessi e quote capitali costanti posticipate.

AMMORTAMENTO A RATE COSTANTI ANTICIPATE

Nell'ammortamento a rate costanti anticipate si ha

$$R_0 = R_1 = \ldots = R_{m-1} = R$$

quindi

$$\boldsymbol{x} / \boldsymbol{t} = \{S - R, -R, -R, \ldots, -R\} / \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$$

Per la condizione di equità si ha

$$W(0, \boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - \sum_{k=0}^{m-1} R(1+i)^{-k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S - R\, \ddot{a}_{\overline{m|}\, i} = 0$$

Indicate con $R_k = C_k + I_k \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1$ le rate d'ammortamento

si ha

$I_k \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1$ quote interesse con $I_k = d\, D_{k+1}^{-}$

Il debito residuo $D_k^{-} = \sum_{h=k}^{m-1} C_h \qquad k = 1, \ldots, m-1$

è dato da

$$D_k^{-} = R\, \ddot{a}_{\overline{m-k|}\, i} \qquad k = 1, \ldots, m-1$$

Negli ammortamenti progressivi le quote interessi sono non crescenti.

Nel caso dell'ammortamento a rate costanti, le quote interesse sono decrescenti, quindi le quote capitale sono crescenti. Si ha che le quote capitale sono crescenti in progressione geometrica di ragione $(1+i)$

$$C_{k+1} = C_k (1+i) \qquad\qquad k = 0,1,\dots,m-2$$

Si ha allora

$$C_k = C_0 (1+i)^k \qquad\qquad k = 1,2,\dots,m-1$$

essendo $\quad C_0 = R - I_0 = R - d\,(S - C_0) = R - d\left(R\,\ddot{a}_{\overline{m|}\,i} - C_0\right) = R(1+i)^{-m} + dC_0$

Quindi $\quad C_0 = R(1+i)^{-(m-1)}, \qquad C_k = R\,v^{m-k-1} \qquad\qquad k = 0,1,\dots,m-1$

Si possono allora calcolare direttamente le quote capitale conoscendo la rata costante.

Si dimostra che le quote capitale coincidono con quelle dell'ammortamento a rate costanti posticipate.

<u>Osservazione</u>:

$$C_k = R - I_k = R - d\,\bar{D}_{k+1} = R - d\left(R\,\ddot{a}_{\overline{m-k-1|}\,i}\right) = R(1+i)^{-(m-k-1)} = R\,v^{m-k-1} \qquad k = 0,1,\dots,m-1$$

Poiché

$$I_k = d\,D_{k+1}^{-} \qquad k = 0,1,\ldots,m-1$$

con $$D_{k+1}^{-} = \sum_{h=k+1}^{m-1} C_h \qquad k = 0,1,\ldots,m-2 \quad \text{e} \quad D_m^{-} = 0$$

se le quote capitali non sono note, per determinare le quote interesse del piano d'ammortamento si può partire dall'ultima

$$I_{m-1} = 0 \;\; \text{quindi} \quad C_{m-1} = R$$

$$I_{m-2} = d\,D_{m-1}^{-} = d\,C_{m-1} \qquad\qquad C_{m-2} = R - I_{m-2}$$

…

oppure si determina il debito residuo mediante la relazione ricorrente

$$M^{-}(k+1,\mathbf{x}) = \left(M^{-}(k,\mathbf{x}) - R_k\right)(1+i) \qquad k = 0,1,\ldots,m-1$$

Esempio:

Ammortamento di un prestito di 50.000 euro, al tasso annuo del 4,5%, con 4 rate annue costanti anticipate.

ESERCIZI SU AMMORTAMENTI A RATE ANTICIPATE

- Un finanziamento di 90.000 euro è ammortizzato al tasso annuo del 4,3% mediante il versamento di 16 rate annue costanti anticipate. Redigere le prime 2 e le ultime 2 righe del piano di ammortamento (in modo da evidenziare le grandezze finanziarie rilevanti, relative alle prime 2 ed alle ultime 2 rate di ammortamento).
  Calcolare il valore residuo dell'operazione di ammortamento, 4 anni e 7 mesi dopo la stipulazione del contratto, in base al tasso di valutazione annuo del 3,5%. (7/2/2012)

- Un finanziamento di 120.000 euro viene ammortizzato in 10 anni al tasso di interesse annuo del 4,3% mediante il versamento di rate annue con anticipazione degli interessi (la prima rata di ammortamento, versata anticipatamente, comprende la sola quota interessi, le quote capitali vengono pagate a partire dalla seconda rata, in tutto ci sono 11 rate). Redigere le prime tre e le ultime due righe del piano di ammortamento sapendo che le prime due quote capitale ammontano rispettivamente a 5.000 e 8.000 euro e le ultime due ammontano a 15.000 euro ciascuna.
  Nel contratto di mutuo è inoltre data la possibilità di optare, trascorsi due anni dalla stipulazione del contratto e subito dopo avere effettuato il pagamento della terza rata, per un ammortamento a rate costanti, ferme restando le condizioni economiche e la durata complessiva del prestito. Determinare l'ammontare della rata costante. (24/1/2012)