LEZIONE 34 — **FORME BILINEARI** — 21/11/17

Indicheremo con K o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

V spazio vettoriale su K, di dimensione (finita) n.

Def. FORMA BILINEARE su V è un'applicazione $b: V \times V \to \underline{K}$ tale che valgono

FB1 $\quad b(v+v', w) = b(v,w) + b(v',w) \qquad \forall v, v', w, w' \in V$

FB2 $\quad b(v, w+w') = b(v,w) + b(v,w') \qquad \forall \lambda \in K$

FB3 $\quad b(\lambda v, w) = \lambda b(v,w) = b(v, \lambda w)$

Cioè, b è lineare separatamente in ciascun argomento.

Se $K = \mathbb{R}$, un prodotto scalare su V è un esempio di forma bilineare.

Una forma bilineare si dice SIMMETRICA se

$$b(v,w) = b(w,v) \qquad \forall v, w \in V$$

Una forma bilineare si dice ANTISIMMETRICA se

$$b(v,w) = -b(w,v) \qquad \forall v, w \in V$$

Per ogni forma bilin. antisimmetrica si ha

$$b(v,v) = -b(v,v) \Rightarrow 2b(v,v) = 0 \underset{\text{SPIEGARE}}{\Longrightarrow} \underbrace{b(v,v) = 0 \quad \forall v \in V}_{(*)}$$

Una forma bilineare per cui vale (*) si dice ALTERNANTE.

Viceversa, se $b: V \times V \to K$ è una forma bilin. alternante allora presi comunque $v, w \in V$ si ha:

$$0 = p(u+v, u+v) = \underbrace{p(u,u)}_{=0} + p(u,v) + p(v,u) + \underbrace{p(v,v)}_{=0} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow p(u,v) = -p(v,u)$$ Dunque:

ANTISIMMETRICA $\Longleftrightarrow$ ALTERNANTE

ESEMPI

1) La forma bilineare <u>nulla</u>: $b(v,w)=0 \quad \forall v,w\in V$.

2) $V=K^n$. I vettori di V sono pensati come matrici $n\times 1$.
A matrice $n\times n$ ad entrate in K, fissata. Allora
$b(v,w) \overset{def}{=} {}^t v A w \in K$ prodotto $r\times c$.
$e_1,\dots,e_n$ sia la base canonica di K^n. $1\le i,j\le n$ (interi fissati)

$\underset{1\times n}{{}^t e_i}\,\underset{n\times n}{A} = |a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}|$ è l'i-esima riga di A

$$\Rightarrow \underline{\underline{b(e_i,e_j)}} = {}^t e_i A e_j = |a_{i1}\cdots a_{in}| \begin{vmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix} = \underline{\underline{a_{ij}}} \qquad (0)$$

j-esima riga

IDEE "GEOMETRICHE" — "CONTI"

- V spazio vettoriale $/K$ $\xrightarrow{\text{FISSO BASI}}$ K^n
- appl. lineari $f: V\to U$ $\rightsquigarrow$ $L_A: K^n\to K^m$ $\quad \underline{A}$ (nella matrice A è codificata tutta l'informazione di f)
- forme bilineari $b: V\times V\to K$ $\rightsquigarrow$?

V spazio vettoriale $/K$ $\quad \mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ base ordinata di V
$\mathcal{B}$ è <u>fissata</u>.
Allora posso associare ad ogni forma bilineare su V:
$b: V\times V\to K$ una matrice A, $n\times n$:

Presi comunque due interi i,j con $1\le i,j\le n$, pongo

$$\boxed{a_{ij} \overset{def}{=} b(v_i,v_j)} \qquad A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

Il punto essenziale è che:
La matrice A individua completamente la forma bilineare b. Infatti, si ha: $\forall v,w\in V$ sia
$v=x_1v_1+\dots+x_nv_n \quad w=y_1v_1+\dots+y_nv_n \quad x_i,y_i\in K$

$$b(v,w) = b(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, w) = \sum_{i=1}^{n} b(x_i v_i, w) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i b(v_i, w) = \sum_{i=1}^{n} x_i b(v_i, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) =$$ SPIEG!

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right) y_j =$$

$$= |x_1 \dots x_n| A \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} \quad (1)$$

un momento di riflessione (anche due ....)

$b : V \times V \to K$ sia forma bilineare <u>simmetrica</u>

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base ord. qualsiasi di V, fissata.

A sia la matrice che rappresenta b rispetto $\mathcal{B}$.

Allora

$$a_{ij} = b(v_i, v_j) \overset{\text{perché } b \text{ è simmetrica}}{=} b(v_j, v_i) = a_{ji} \qquad \forall i, \forall j$$

cioè A è una matrice simmetrica : <u>$A = {}^tA$</u>

Viceversa, supponiamo che la matrice A che rappresenta una qualsiasi forma bilin $b : V \times V \to K$ risp. ad una base $\mathcal{B}$ di V sia simmetrica : <u>$A = {}^tA$</u>.

Allora, per ogni $v, w \in V$, la (1) ci dice che

$$b(v,w) = |x_1 \dots x_n| A \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} = \underbrace{{}^t x A y}_{} = {}^t({}^t x A y) = {}^t y \, {}^t A \, {}^t({}^t x) =$$

$$= {}^t y A x \underset{(1)}{=} b(w, v)$$

questo è uno scalare, cioè una matrice 1x1. Quindi è uguale alla sua trasposta

Riassumendo:

$b : V \times V \to K$ è simmetrica $\Rightarrow A = M_{\mathcal{B}}(b)$ è simmetrica

<u>ESERCIZIO</u>

Vedere che cosa succede per le forme bilineari anti-simmetriche

Abbiamo dimostrato la

PROPOSIZIONE

Sia V sp. vettoriale su K, $\dim(V) = n$, e sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ordinata di V, fissata. Allora $b \longmapsto M_{\mathcal{B}}(b)$ è una corrispondenza biunivoca tra forme bilineari su V e matrici $n \times n$ ad entrate in K.
Tale biezione induce una biezione tra il sottoinsieme delle forme bilin simmetriche (risp. antisimmetriche) e quello delle matrici $n \times n$ simmetriche (risp. antisimm.)

La corrispondenza della prop. precedente dipende dalla scelta della base $\mathcal{B}$ di V. Se $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ è un'altra base di V, che relazione c'è tra le matrici $M_{\mathcal{B}}(b)$ e $M_{\mathcal{C}}(b)$ che rappresentano la forma bilin b rispetto a $\mathcal{B}$ ed a $\mathcal{C}$? $A = M_{\mathcal{B}}(b)$ $\quad B = M_{\mathcal{C}}(b)$

Sia $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V)$ la matrice di cambiamento di base.
Ricordiamo che P "funziona" così:

$v \in V$ arbitrario $\quad v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = x_1' u_1 + \ldots + x_n' u_n$
$(x_i, x_h' \in K \quad \forall i, \forall h)$

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \qquad x' = \begin{vmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{vmatrix}$$

allora $\underline{x' = Px}$

è la stessa cosa

Anche:
$$\begin{tikzcd} & K^n \arrow[dd, "L_P"] \\ V \arrow[ur, "K_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "K_{\mathcal{C}}"'] & \\ & K^n \end{tikzcd}$$
è un diagramma commutativo.

P è invertibile. $\qquad$ cioè $\boxed{K_{\mathcal{C}} = L_P \circ K_{\mathcal{B}}}$

Allora, se i vettori colonna y, y' rappresentano $w \in V$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente, si ha:

$$^t x' B y' = {}^t(Px) B (Py) = {}^t x ({}^t P B P) y \qquad \text{dunque:}$$
$$\parallel$$
$$b(v, w) = {}^t x A y \qquad \underline{{}^t x A y = {}^t x ({}^t P B P) y} \qquad \forall x, y \in K^n$$

Per la (0) ne segue:

(⊛) $\boxed{A = {}^tPBP}$ con P invertibile

Def. Se per due matrici $n \times n$ A, B vale la relazione (⊛), esse si dicono CONGRUENTI

ESERCIZIO Verificare che la relazione "A è congruente a B" è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le matrici $n \times n$, ad entrate in K.

Allora qui sopra abbiamo dimostrato ~~che~~ la

PROPOSIZIONE
Sia V uno spazio vettoriale su K, di dimensione n. Allora due matrici $n \times n$, siano A, B, rappresentano la stessa forma bilineare su K (rispetto a basi diverse di V) $\Longleftrightarrow$ A e B sono congruenti tra loro.

ESERCIZIO Se P è una matrice $n \times n$ invertibile, allora anche ${}^tP$ è invertibile, e si ha $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

PROP. Matrici $n \times n$ congruenti hanno lo stesso rango.

Dim. Siano A, B matrici $n \times n$, e sia P matrice $n \times n$ invertibile tale che $A = {}^tPBP$. Sappiamo già che

$L_B : K^n \longrightarrow K^n$ $\quad rg(B) = \dim(\operatorname{Im}(L_B))$ RI-SPIEGARE

Analogamente si ha

$L_A : K^n \longrightarrow K^n$ $\quad rg(A) = \dim(\operatorname{Im}(L_A))$

$A = {}^tPBP \implies$

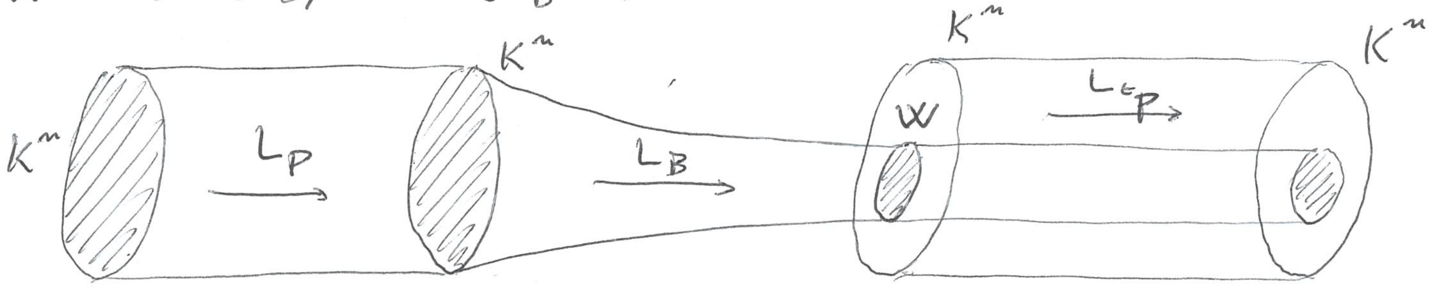
$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, "L_P"', "\wr"] & K^n \\ K^n \arrow[r, "L_B"] & K^n \arrow[u, "L_{{}^tP}"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

è commutativo, cioè: $L_A = L_{{}^tP} \circ L_B \circ L_P$

perchè P e ${}^tP$ son invertibili

P invertibile $\Rightarrow L_P$ isomorfismo, quindi

$W \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(L_B) = \mathrm{Im}(L_B \circ L_P)$



Per l'esercizio precedente, anche ${}^tP$ è invertibile e quindi anche $L_{{}^tP}$ è un isomorfismo. Allora

$$rg(A) = \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = \dim(L_{{}^tP}(W)) = \dim(W) = rg(B)$$

■

Def. Se una forma bilineare $b: V \times V \to K$ è rappresentata risp. ad una base $\mathcal{B}$ di V dalla matrice A, allora chiameremo $rg(A)$ il rango della forma b.

La proposizione precedente ci dice che il rango è ben definito. SPIEGARE

b si dirà non-degenere (risp: degenere) $\Leftrightarrow rg(b) = n$ (risp. $rg(b) < n$)

Sia $b: V \times V \to K$ non-degenere. Sia A la matrice che rappresenta b rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V. Allora

$rg(A) = n \Rightarrow A$ è invertibile.

Fisso $v \in V$, $v \neq 0$. Se $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, sia $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$. ${}^t x = |x_1 \ldots x_n|$. Allora ${}^t x A$ è una matrice $1 \times n$ non nulla.

Infatti, se per assurdo fosse ${}^t x A = 0 \Rightarrow {}^t({}^t x A) = {}^t 0$

$\Rightarrow {}^t A x = \underline{0}_{n \times 1}$ ma ${}^t A$ è invert. $\Rightarrow x = 0$

assurdo.

Da ${}^t x A \neq 0$ segue l'esistenza di $y \in K^n$ tale che

${}^t x A y \neq 0$ SPIEGARE.

$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$ sia $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ Allora

$b(v, w) = \underbrace{{}^t x A y \neq 0}$

Necessariamente $y \neq 0_{K^n} \Rightarrow w \neq 0_V$.

ESERCIZIO

Se $b: V \times V \to K$ è una forma bilineare non-degenere, e se $w \in V$, con $w \neq 0_V$, provare che esiste $v \in V$ $(v \neq 0_V)$ tale che $b(v, w) \neq 0$.

Riassumo:

PROPOSIZIONE

Se $b: V \times V \to K$ è una forma bilineare. ~~non-degenere~~

Allora sono equivalenti:

a) per ogni $v \in V$, $v \neq 0$, esiste $w \in V$ t.c. $b(v, w) \neq 0$

b) per ogni $w \in V$, $w \neq 0$, esiste $v \in V$ t.c. $b(v, w) \neq 0$

c) $b: V \times V \to K$ è non-degenere.

Dim.

Abbiamo visto sopra che $c) \Rightarrow a)$, $c) \Rightarrow b)$

Proviamo ora che $b) \Rightarrow c)$ (ESERCIZIO $a) \Rightarrow c)$)

Supponiamo, per assurdo, che A non sia invertibile

$\Leftrightarrow rg(A) < n \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) > 0$

Sia $y \in K^n$, $y \neq 0_{K^n}$ tale che $y \in \mathrm{Ker}(L_A) \Leftrightarrow \underbrace{Ay}_{n \times 1} = \underline{0}$

Allora $\forall x \in K^n$ si ha ${}^t x A y = 0$

Questo contraddice b) (SPIEGARE), ed abbiamo l'assurdo. ∎

D'ora in avanti <u>considereremo solo forme bilineari simmetriche</u>.

<u>Def.</u> $b: V \times V \to K$ f.b. simmetrica. $u, v \in V$ si dicono ortogonali tra loro se $b(u,v)=0$ <u>$u \perp v$</u>

<u>NB</u> È una nozione "relativa": dipende dalla b fissata.

$E \subset V$ sottoinsieme $E \neq \emptyset$

$E^\perp \overset{def}{=} \{v \in V \mid b(v,w)=0 \quad \forall w \in E\}$ è sottospazio vett. di V

<u>Def</u> $v \in V$ si dice vettore <u>ISOTROPO</u> (risp. alla forma b !!!) se $b(v,v)=0$.

0_V è banalmente vettore isotropo, ma possono esistere anche $v \neq 0$ che sono isotropi.

<u>ESEMPIO</u>

$b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sia def. rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\underbrace{A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{NB: è simmetrica}} \qquad 0 = a_{22} = b(e_2, e_2) \Longrightarrow$$

e_2 è vettore isotropo per b.

<u>ESEMPIO</u> (meno scemo)

$b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dato da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 4 & 27 \end{bmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^3 \qquad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$${}^t x A x = x_1^2 + x_2^2 - 12 x_1 x_3 + 8 x_2 x_3 + 27 x_3^2$$

Esistono ~~b~~ vettori isotropi $\neq 0$ con $x_3 = 0$?

$x = {}^t|x_1 \ x_2 \ 0| \implies {}^t x A x = x_1^2 + x_2^2$

Quindi ${}^t x A x = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \implies x = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Suppongo $x_3 \neq 0$

$x_1^2 + x_2^2 - 12 x_1 x_3 + 8 x_2 x_3 + 27 x_3^2 = 0 \ / : x_3^2$

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 - 12\frac{x_1}{x_3} + 8\frac{x_2}{x_3} + 27 = 0 \qquad \frac{x_1}{x_3} = x \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 27 = 0$

le buone, vecchie, care coord. cartesiane.

È l'equaz. della circonferenza di centro $(6,-4)$ e raggio 5. Sia $\mathcal{C}$.

Di suoi punti ne trovo quanti ne voglio.

Se $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, allora $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{vmatrix}$ è un vettore isotropo per b, non nullo.

Se consideriamo l'esempio precedente, ci possiamo chiedere quali siano i suoi vettori isotropi $\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, e con $x_3 \neq 0$

$$|x \ y \ 1| \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = \underbrace{x^2 + 6xy + 5x + 2y - 1 = 0}_{????}$$

Vedremo che è l'equazione di un iperbole.