$\boxed{\text{LEZIONE 35}}$ 22/11/17 1

Ellisse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{è diagonale}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\text{anche questa}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parabola

$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

ha rango $= 3$

$$ax^2 + bx - y + c = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{1}{2} & c \end{pmatrix}}^{\text{è simmetrica}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se ho una qualsiasi equazione polinomiale nelle indeterminate x, y, di secondo grado (a coefficienti in K, dove $K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$):

$$\underbrace{a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}}_{\shortparallel} = 0 \qquad \text{allora}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{simmetrica.}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

La chiamo A

L'idea è di cercare di cambiare base (da $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$) in K^3 in modo che, se P è la matrice di cambiamento di base [crossed out] [crossed out] $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_c}(id_{K^3})$ allora ${}^tPAP$ sia diagonale per cercare di capire qualcosa.

Il cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ (SPIEGARE) verrà interpretato come <u>cambiamento di coordinate</u> nel piano cartesiano. Vedremo meglio in seguito.

<u>TEOREMA</u>

Sia V uno spazio vettoriale su K, $\dim(V) = n \geq 1$. Sia $b: V \times V \to K$ una forma bilineare <u>simmetrica</u>. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che la matrice che rappresenta b rispetto a $\mathcal{B}$ è simmetrica. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica A, $n \times n$, è congruente ad una matrice diagonale.

<u>Dim.</u>

La dimostrazione non è costruttiva. È per induzione su n. Se $n = 1$, è tutto a posto: non c'è niente da dimostrare.

- Supponiamo, quindi, che $n > 1$, e che il teorema sia vero per tutte le forme bilineari simmetriche su spazi vettoriali di dimensione $< n$.
- Se $b: V \times V \to K$ è tale che $b(v, w) = 0 \quad \forall v, w \in V$ (è una possibilità) allora la matrice $n \times n$ che rappresenta b rispetto ad una qualsiasi base sarà la matrice nulla, che è già simmetrica.
- Altrimenti, esistono $v, w \in V$ tali che $b(v, w) \neq 0$. Necessariamente (per la bilinearità di b!) si ha che $v \neq 0_V$ e $w \neq 0_V$.

Cerchiamo un vettore NON isotropo per b, non nullo. Cioè un $u \in V$ tale che $b(u, u) \neq 0_K$ e $u \neq 0_V$.

Se entrambi v e w sono isotropi, allora $t \overset{def}{=} v+w$ funziona. Infatti

$$b(t,t) = b(v+w, v+w) = \underbrace{b(v,v)}_{=0} + b(v,w) + b(w,v) + \underbrace{b(w,w)}_{=0} =$$

b è simmetrica

$$= 2b(v,w) \neq 0$$

Da questo segue anche $t \neq 0_V$.

- Sia $U = \{\lambda u \mid \lambda \in K\} \subset V$ il sottospazio vettoriale di V generato da u. $\underline{\dim(U) = 1}$.

  Considero $U^\perp = \{v \in V \mid b(u,v) = 0\}$. È sottospazio vettoriale di V

- Si ha $\underline{U + U^\perp = V}$ ⊛

  Infatti, sia $w \in V$ <u>arbitrario</u>.

  Cerco $\lambda \in K$ tale che $u \perp w - \lambda u$ ($\perp$ risp. b)

$$0 = b(u, w - \lambda u) = b(u,w) - b(u, \lambda u) = b(u,w) - \lambda \underbrace{b(u,u)}_{\neq 0}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{b(u,w)}{b(u,u)}}$$ funziona! Allora

$$w = \underbrace{\frac{b(u,w)}{b(u,u)} u}_{\in U} + \underbrace{w - \frac{b(u,w)}{b(u,u)} u}_{\in U^\perp} \qquad \forall w \in V$$

quindi vale ⊛

- Si ha $\underline{U \cap U^\perp = \{0_V\}}$

  Infatti, se $v \in U \cap U^\perp$, allora $v \in U$ dunque esiste $\lambda \in K$ tale che $v = \lambda u$. Per def. di $U^\perp$ si ha

$$0 = b(v,v) = b(\lambda u, \lambda u) = \lambda^2 \underbrace{b(u,u)}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda = 0_K \Rightarrow v = 0_V$$

Sia $b' : U^\perp \times U^\perp \longrightarrow K$ la restrizione di b ad $U^\perp$

$b'(v, w) = b(v, w) \quad \forall\, v, w \in U^\perp$. b' è f. bil. <u>simmetrica</u>

Ora <u>$\dim(U^\perp) = n-1$</u>. Questo segue dalla formula di Grassmann:

$$\underbrace{\dim(\underbrace{U + U^\perp}_{\overset{\shortparallel}{V}})}_{=n} + \underbrace{\dim(\underbrace{U \cap U^\perp}_{=\{0_V\}})}_{=0} = \underbrace{\dim(U)}_{\overset{\shortparallel}{1}} + \dim(U^\perp)$$

Allora posso applicare a b' l'ipotesi induttiva: Quindi esiste $\{u_2, \dots, u_n\}$ base di $U^\perp$ tale che la matrice A' $(n-1)\times(n-1)$ che rappresenta b' rispetto $u_2, \dots, u_n$ è diagonale. Precisamente questo vuol dire che presi comunque interi i, j con $1 \leq i, j \leq n$ e <u>$i \neq j$</u>

Allora

$$b'(u_i, u_j) \overbrace{\left(= b(u_i, u_j) \right)}^{\text{ricordiamoci}} = 0$$

Essendo $V = U \oplus U^\perp$, si ha che $u, u_2, \dots, u_n$ è una base di V. La matrice A che rappresenta b rispetto a questa base è

$$A = \left|\begin{array}{c|c} b(u, u) & 0 \; \dots \; 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right|$$

← questi zeri sono dovuti al fatto che se $h \geq 2$ $u_h \in U^\perp$.

questi zeri sono dovuti al fatto che A è simmetrica. ■

Ma si può fare meglio!

$\boxed{K = \mathbb{C}}$

Sia $u_1, \dots, u_n \in V$ una base rispetto alla quale la matrice A di b è diagonale.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cambiando eventualmente l'ordine degli u_i è lecito assumere che $a_{ii} \neq 0 \iff i \leq r (\leq n)$

dove $r = rg(A)$.

Considero il polinomio $X^2 - a_{11}$. In $\mathbb{C}$ esso ha sicuramente una radice, sia $\alpha_1 \in \mathbb{C}$. Dunque

$\alpha_1^2 - a_{11} = 0$ cioè $\alpha_1^2 = a_{11}$ $\quad a_{11} \neq 0 \Rightarrow \underline{\alpha_1 \neq 0}$

$$P_1 \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \qquad P_1 = {}^tP_1 \qquad {}^tP_1 A P_1 = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & a_{22} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{rr} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right|$$

Con lo stesso metodo "trasformo" a_{22} in 1 - e così via. Sia $P = P_1 \dots P_r$

$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\alpha_r} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{ancora } P = {}^tP \qquad {}^tPAP = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

ESEMPIO

su $\mathbb{C}$ le due matrici diagonali $\begin{vmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{vmatrix}$ sono congruenti

$$|x \;\; y \;\; 1| \begin{vmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$x^2 - y^2 = 0$ è l'equazione complessiva di due rette distinte

$$|x \;\; y \;\; 1| \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$$

ancora due rette distinte.

ESEMPIO

su $\mathbb{C}$ due qualsiasi matrici 3x3 di rango 3 sono sempre congruenti tra loro. Infatti, ciascuna di esse è congruente a I_3.

Insomma, su $\mathbb{C}$ il rango individua perfettamente la classe di congruenza.

$\boxed{K=\mathbb{R}}$ Qui le cose sono più delicate.

Se A è una matrice $n\times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$, e $rg(A)=r$, allora possiamo trovare una base di V sia $u_1, \dots, u_n$, tale che la matrice di b risp. tale base sia diagonale, e del tipo

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{pp} \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} a_{p+1,p+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{rr} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \; 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$

dove

$a_{ii} > 0$ se $i \le p$

$a_{ii} < 0$ se $p+1 \le i \le r$

Se $i \le p$ $a_{ii} > 0$ ed il polinomio $\overbrace{X^2 - a_{ii}}^{\text{a coeff. in } \mathbb{R}}$ ha una radice $\underline{\alpha_i \in \mathbb{R}}$. Quindi, operando come nel caso $K=\mathbb{C}$, si può trasformare $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp}$ in 1.

Se $p+1 \le i \le r$ il polinomio $X^2-(-a_{ii}) = X^2 + a_{ii}$ ha una radice $\alpha_i \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \alpha_i^2 = -a_{ii}$

Utilizzando il metodo visto per $K = \mathbb{C}$ in questo caso, ciascuno dei $a_{p+1,p+1}, \dots, a_{rr}$ viene trasformato in un "-1".

Quindi la matrice A è congruente a

$$\left[\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rimane da vedere che

Teorema di Sylvester

L'intero p è ben determinato.

La coppia $(p, r-p)$ si chiama SEGNATURA di b

Dim. Supponiamo esista un'altra base $v_1, \dots, v_n$ di V rispetto alla quale la matrice di b sia

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} b_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{tt} & \\ & & & b_{t+1,t+1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & b_{rr} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

con $t \neq p$. Allora, o $t < p$ oppure $t > p$.

Per fissare le idee, sia $t < p \iff p - t > 0$

Considero i sottospazi vettoriali di V:

$U = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_p)$ $\qquad W = \mathrm{Span}(v_{t+1}, \dots, v_n)$

$\dim(U) + \dim(W) = p + n - t > n$

Grassmann "

$\underbrace{\dim(U+W)}_{\leq n} + \dim(U \cap W)$ $\implies \dim(U \cap W) > n - \underbrace{\dim(U+W)}_{\leq n}$

$\dim(U \cap W) > 0$

Sia $w \in U \cap W \quad w \neq 0$

$w \neq 0 \Rightarrow$ qualche λ_i è $\neq 0$

$w \in U \Rightarrow \quad w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \Longrightarrow$

$$b(w, w) = a_{11}\lambda_1^2 + \dots + a_{pp}\lambda_p^2 > 0$$

ASSURDO

$w \in W \Rightarrow \quad w = \mu_{t+1} v_1 + \dots + \mu_n v_n \longrightarrow$

$$b(w, w) = b_{t+1,t+1}\,\mu_{t+1}^2 + \dots + b_{nn}\,\mu_n^2 \leq 0$$

Dunque $t \geq p$. In modo analogo si prova che $t \leq p$, e si conclude $\underline{\underline{t = p}}$ ■

ESEMPI

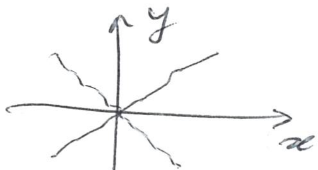
- Nei casi di parabola, ellisse ed iperbole la matrice simmetrica A 3×3 ha sempre rango 3.
- Nel caso dell'ellisse la segnatura è $(2, 1)$
- " " " iperbole " " " $(1, 2)$
- Se A è una matrice di segnatura $(3, 0)$, allora A è congruente alla matrice I_3

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} I_3 \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + 1$$

$x^2 + y^2 + 1 = 0$ <u>non ha</u> soluzioni ...

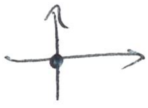
- <u>ESERCIZIO</u> Qual'è la segnatura della matrice della parabola?

- $\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{vmatrix}$ <u>non sono</u> congruenti su $\mathbb{R}$



$\downarrow$ $x^2 + y^2 = 0$

$\hookrightarrow x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$



un solo punto