Università degli Studi di Trieste

Corso di Laurea Magistrale in
INGEGNERIA CLINICA

RICHIAMI DI ANALISI DEI SEGNALI: ANALISI SPETTRALE

Corso di Complementi di Analisi di Segnali Biomedici

Modulo NEUROSEGNALI

Docente Sara Renata Francesca MARCEGLIA

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

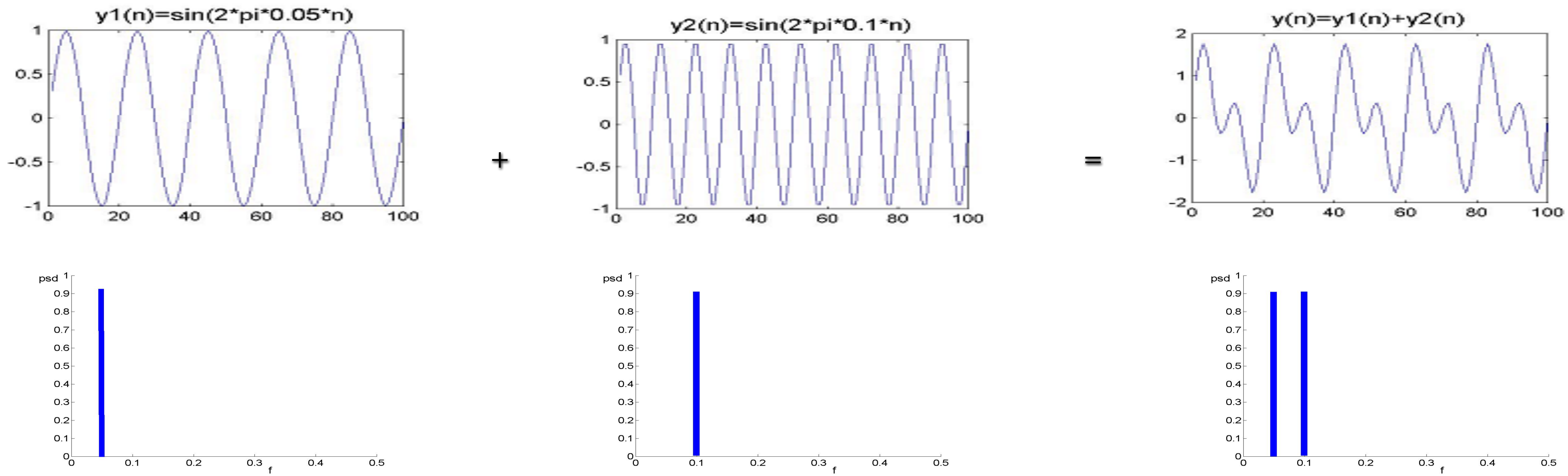
IL DOMINIO DELLA FREQUENZA

- Esempio dominio del tempo:
  - In che giorni vai a fare shopping?
  - A che ora non vai mai a fare shopping?
- Esempio dominio della frequenza:
  - Quanto spesso vai a fare shopping?
  - Quanti vanno a fare shopping due volte alla settimana?

LE INFORMAZIONI DI BASE SONO LE STESSE, MA IL MODO DI RAPPRESENTARLE METTE IN LUCE ASPETTI DIVERSI

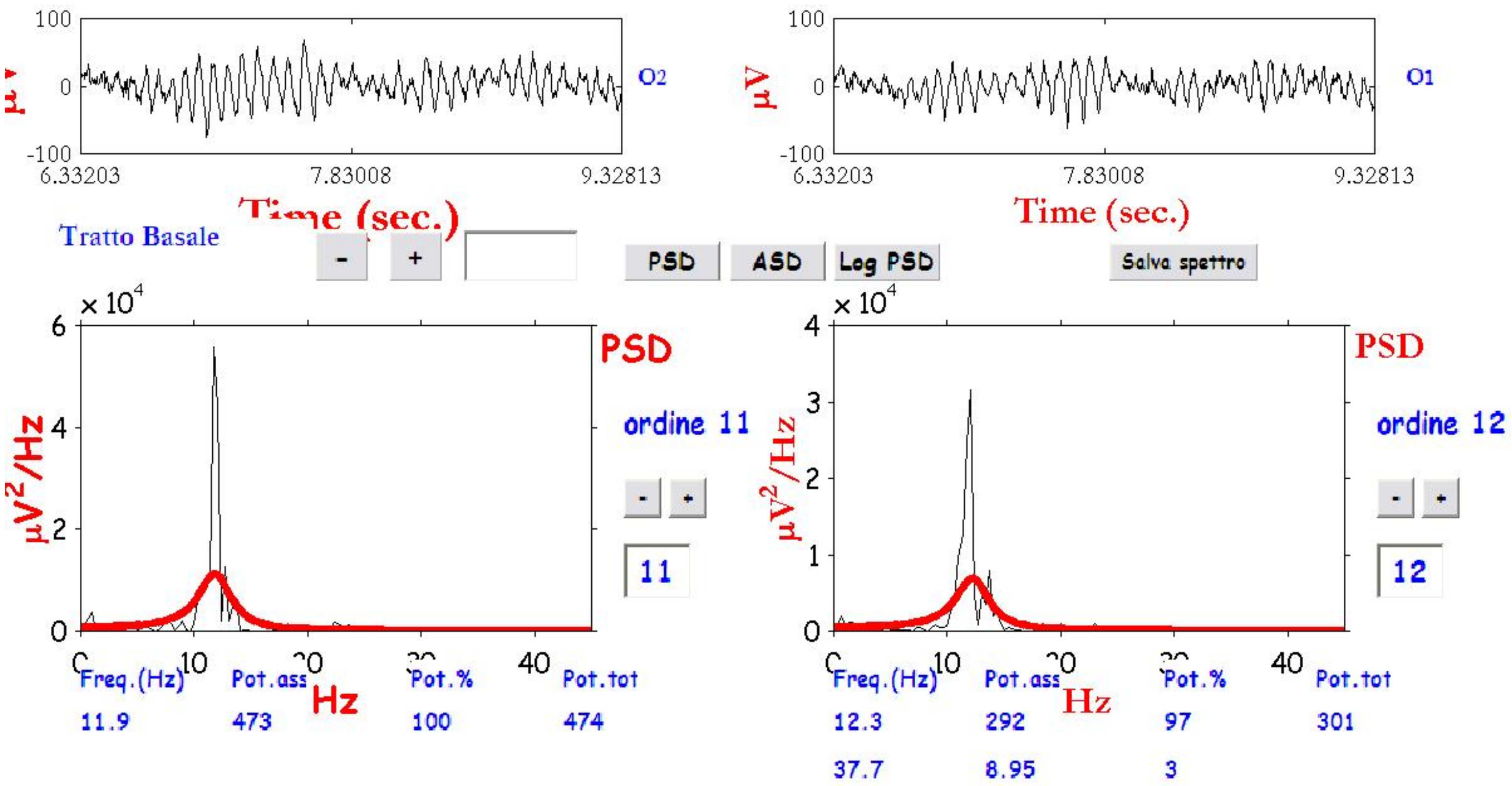
RAPPRESENTAZIONE NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

- Un segnale è caratterizzato da tutte le sinusoidi che lo compongono
- Per rappresentare le sinusoidi che compongono un segnale si utilizza il piano delle frequenze
- Sull'asse **x** sono riportate le frequenze delle sinusoidi, sull'asse **y** l'ampiezza delle sinusoidi



ESEMPIO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



In questo tracciato EEG il ritmo prevalente è il ritmo alfa, quindi è evidente un picco intorno a 12 Hz

LA TRASFORMATA DI FOURIER

Dato un segnale continuo g(t), la sua Trasformata di Fourier G(f) sarà:

$$G(f) = FT\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

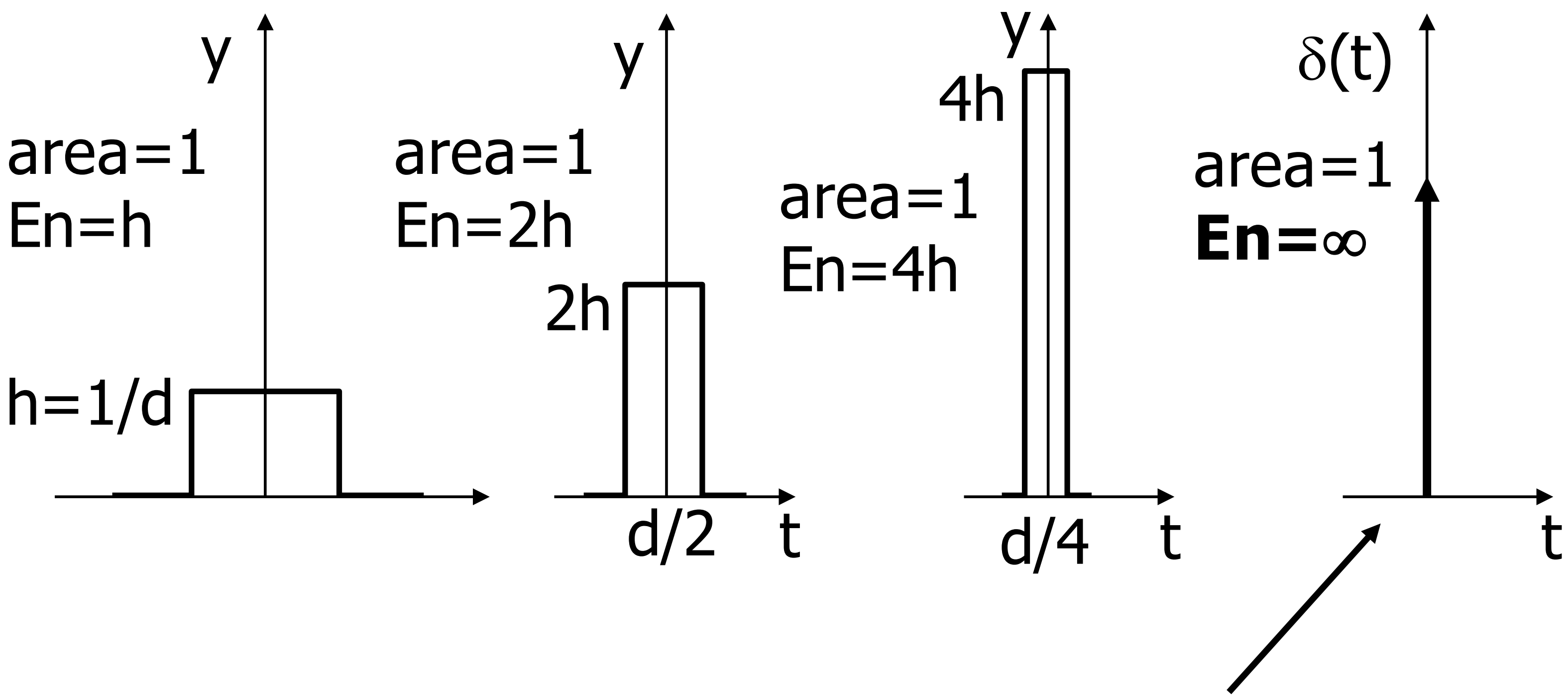
f=frequenza
j=numero immaginario

- G(f) non dipende più dal tempo (è stata integrata nel tempo)
- G(f) è una funzione complessa, caratterizzata da modulo e fase

$$G(f) = |G(f)|e^{j\angle G(f)}$$

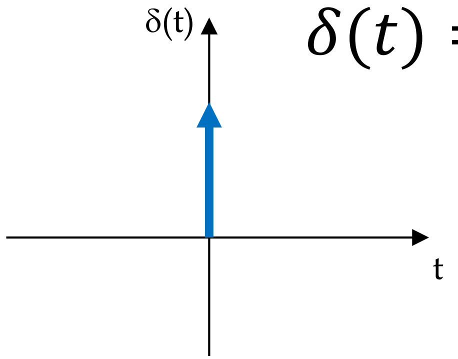
L’IMPULSO

L’**impulso** o **distribuzione di Dirac**, δ(t), è il limite di una serie di funzioni con base sempre più stretta ma con valori sempre più alti in modo da conservare integrale unitario



•l’integrale di δ(t) su un intervallo comprendente t=0 vale 1
•l’energia è illimitata

FT DI UN IMPULSO



$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \delta_\Delta(t)$$

- Funzione che descrive impulsi di energia istantanei nei sistemi fisici
- Utilizzata per l'identificazione dei sistemi (risposta all'impulso)
- L'integrazione di una qualsiasi funzione con l'impulso equivale a campionare la funzione stessa nell'origine
- Esiste anche l'impulso non centrato nell'origine $\delta(t-t_0)$

$$FT\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f 0} = e^0 = 1$$

Qualsiasi funzione moltiplicata per l'impulso equivale alla funzione stessa calcolata in t=0

La FT di un impulso è una costante → lo spettro delle frequenze è completamente piatto

ALTRE TRASFORMATE NOTEVOLI

FUNZIONI PERIODICHE

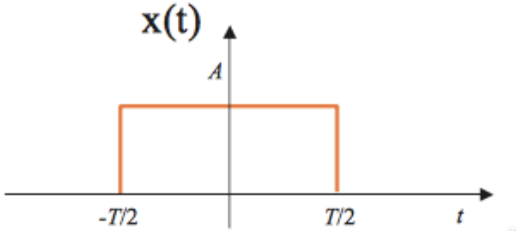
$$\cos(2\pi f_0 t) \qquad FT = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

La FT di un segnale cosinusoidale a frequenza f_0 è una coppia di impulsi centrati in $+f_0$ e $-f_0$

$$sin(2\pi f_0 t) \qquad FT = -\frac{j}{2}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

La FT di un segnale sinusoidale a frequenza f_0 è una coppia di impulsi centrati in $+f_0$ e $-f_0$, ma con ampiezza immaginaria

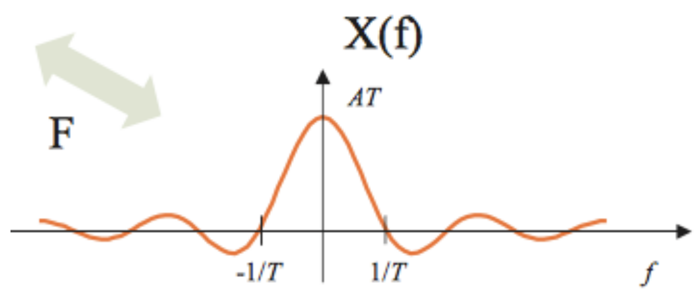
FUNZIONE RETTANGOLARE



$$x(t) = Arect_T(t) = \begin{cases} A & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$FT = AT\frac{sin\pi fT}{\pi fT}$$

Funzione sinc



ANTITRASFORMATA DI FOURIER

La funzione di partenza g(t) può essere riottenuta come **antitrasformata di Fourier** che integra (somma) le infinite componenti

$$g(t) = IFT\,\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df$$

PROPRIETÀ DELLA FT

- **LINEARITÀ:** la FT della combinazione lineare di due segnali è uguale alla combinazione lineare delle due FT

$$ax(t) + by(t) = aFT[x(t)] + bFT[y(t)] = aX(f) + bY(f)$$

- **SIMMETRIA:** la FT gode di simmetria complessa coniugata: la prte reale e il modulo sono simmetrici rispetto all'origine, mentre la parte immaginaria e la fase sono antisimmetrici rispetto all'origine

$$X(f) = X^*(-f)$$

$$Re\big(X(f)\big) = Re(X(-f) \qquad Im\big(X(f)\big) = -Im(X(-f)$$

$$|X(f)| = |X(-f)| \qquad \angle X(f) = -\angle X(-f)$$

PROPRIETÀ DELLA FT

- **TRASLAZIONE NEI TEMPI:** la FT di un segnale con un ritardo è uguale a quella del segnale originale moltiplicata per un esponenziale complesso

$$FT[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0 t} X(f)$$

- **TRASLAZIONE NELLE FREQUENZE**: traslare in frequenza la FT di un segnale equivale a moltiplicare il segnale per un esponenziale complesso

$$X(f-f_0) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

- **DERIVATA NEL TEMPO:** la FT della derivata di una funzione x(t) equivale alla FT del segnale originale, amplificata per j2πf e con un anticipo di fase di 90 gradi

$$FT\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j2\pi f X(f)$$

PROPRIETÀ DELLA FT

- **VALORE NELL'ORIGINE:** la FT di un segnale calcolata in f=0 equivale all'integrale del segnale

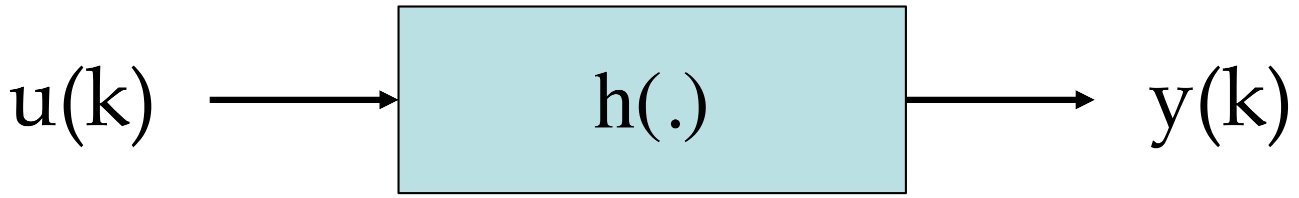
$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi 0 t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

- **SCALA TEMPORALE**

$$FT[x(at)] = \frac{1}{|a|}X(\frac{f}{a})$$

LA CONVOLUZIONE

Considero un sistema lineare, con risposta all'impulso h(.)



Quando u(k) è un impulso,

y(k) = h(k)

Ogni segnale x(k) può essere visto come somma di impulsi, pesati per il valore x(k) e traslati nel tempo in modo da occorrere al tempo k →

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(k-n)$$

Poichè il sistema è lineare, vale la sovrapposizione degli effetti→ la risposta ad una serie di x(k) sarà la somma delle risposte h(k) pesate con il valore di x(k)

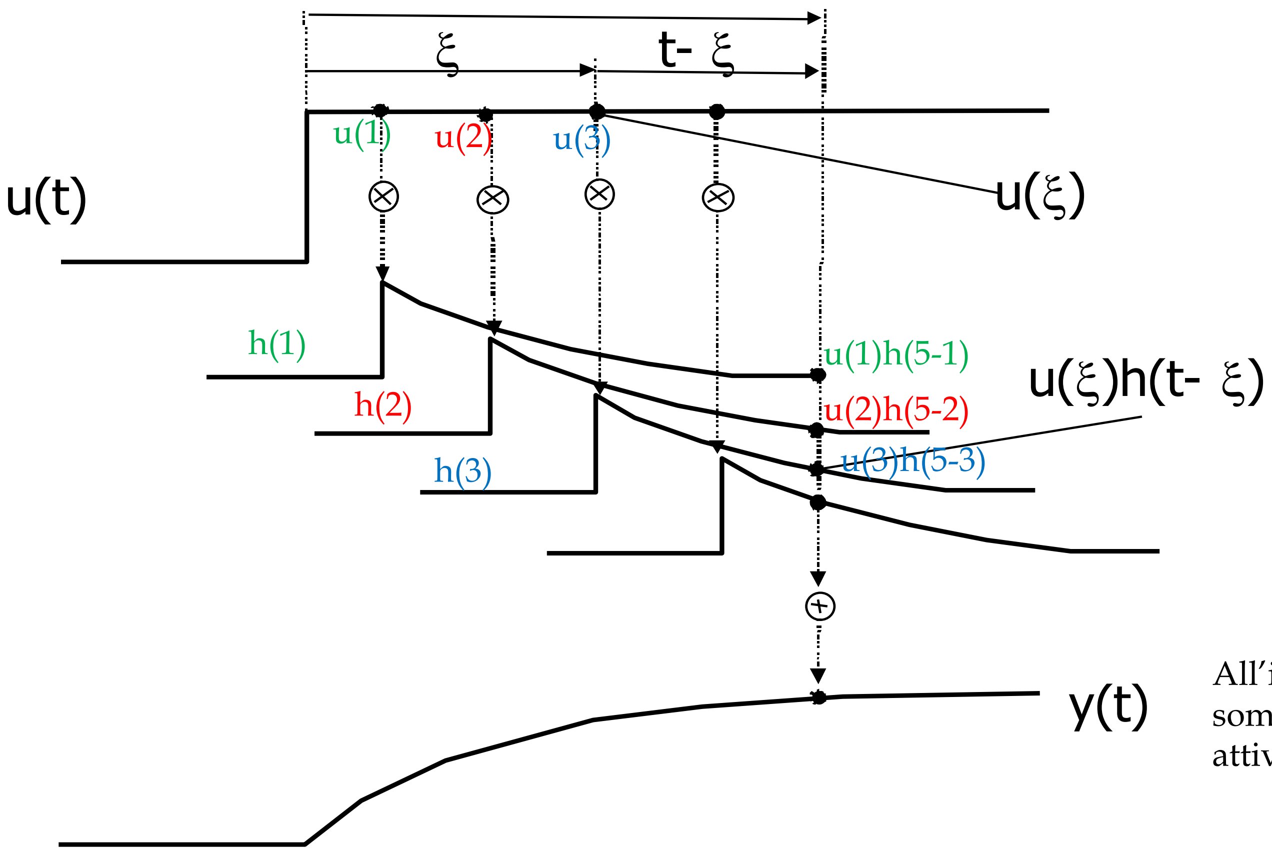
$$\boldsymbol{y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(n-k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n)x(n-k)}$$

CONVOLUZIONE DI x(k) con h(k)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

LA CONVOLUZIONE: SIGNIFICATO

- L'operazione di convoluzione permette di ottenere qualsiasi risposta a partire dalla risposta all'impulso.
- Ogni u(i) è cosiderato un impulso di valore 1*u(i).
- Ad ogni istante, parte una risposta impulsiva che è sempre uguale a se stessa come andamento (eventualmente pesata per il valore u(i), ma nell'esempio è sempre 1)
- Ad un certo istante t, saranno "attive" ancora varie risposte all'impulso, quindi y(t) sarà ottenuto come somma di tutte le risposte ancora attive (attivate all'istante ξ)



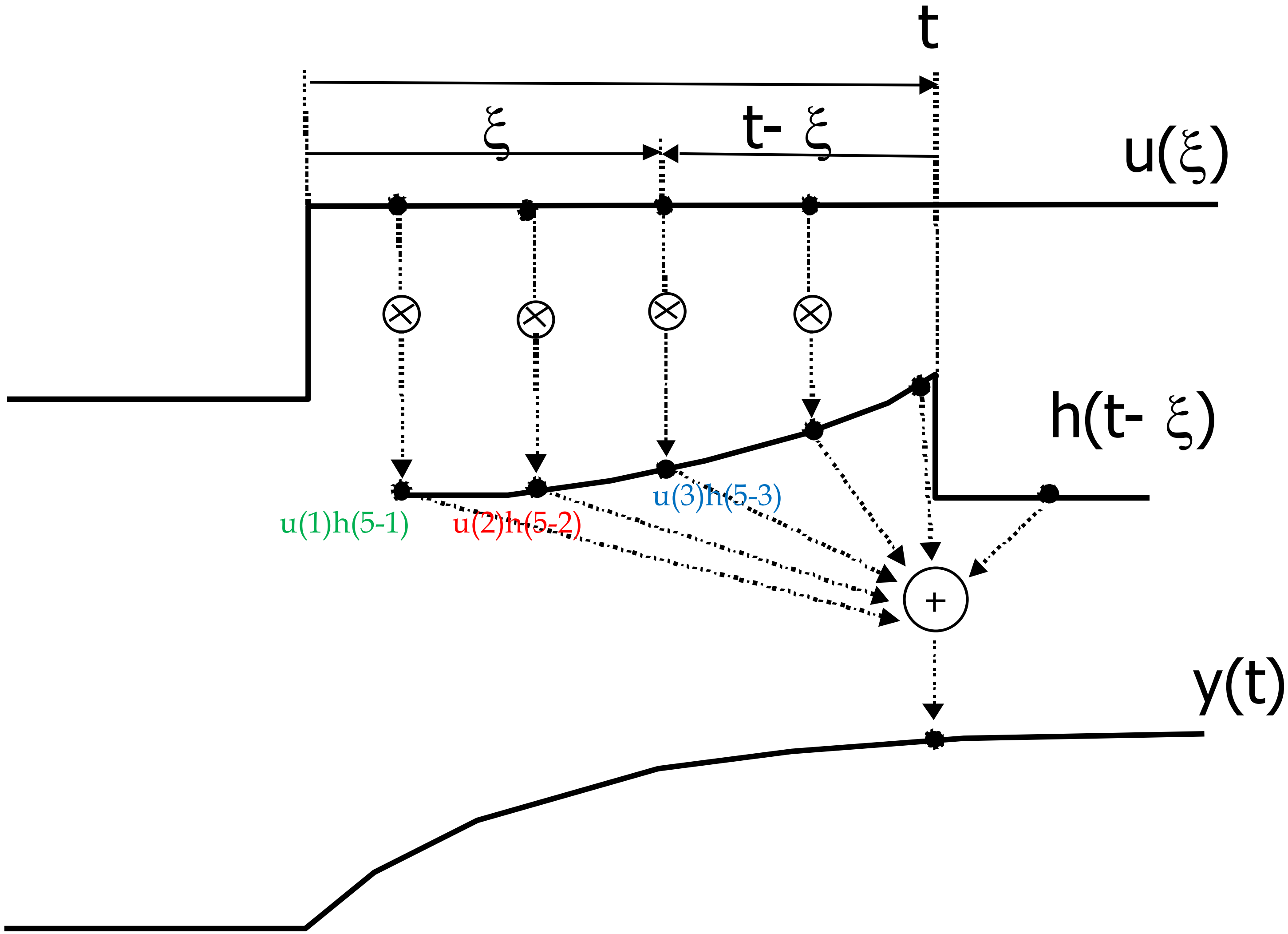
$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\xi)u(\xi)$$

All'istante 5, y(t) è ottenuto dalla sommatoria di tutti I contributi ancora attivi delle h(t-k)u(k)

LA CONVOLUZIONE: SIGNIFICATO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

L'operazione precedente equivale a prendere h(t-ξ), che è uguale a se stessa in tutti i tempi in cui viene "attivata" da un impulso, moltiplicandola in tutti gli istanti precedenti a t per la u(ξ) corrispondente



FT DELLA CONVOLUZIONE

$$FT[x(t) * y(t)] = X(f)Y(f)$$

$$FT[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f)$$

- La convoluzione nel dominio del tempo corrisponde ad una moltiplicazione nel dominio delle frequenze

- Viceversa, la moltiplicazione di due segnali corrisponde ad una convoluzione delle sue trasformate

TEOREMA DI PARSEVAL

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

L'energia del segnale nel tempo è pari all'energia della sua trasformata

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, df$$

DISCRETE FOURIER TRANSFORM

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dato un segnale discreto g(k), posso calcolare la sua equivalente trasformata di Fourier mediante la Discrete Fourier Transform (DFT)

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-j\frac{2\pi knT}{N}}$$

k= 0, 1, …, N-1

- Il numero di campioni in frequenza è pari al numero di campioni nel tempo
- G(k) è una funzione discreta

Il segnale di origine può essere ricalcolato tramite la DFT inversa (IDFT)

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{j\frac{2\pi knT}{N}}$$

n= 0, 1, …, N-1

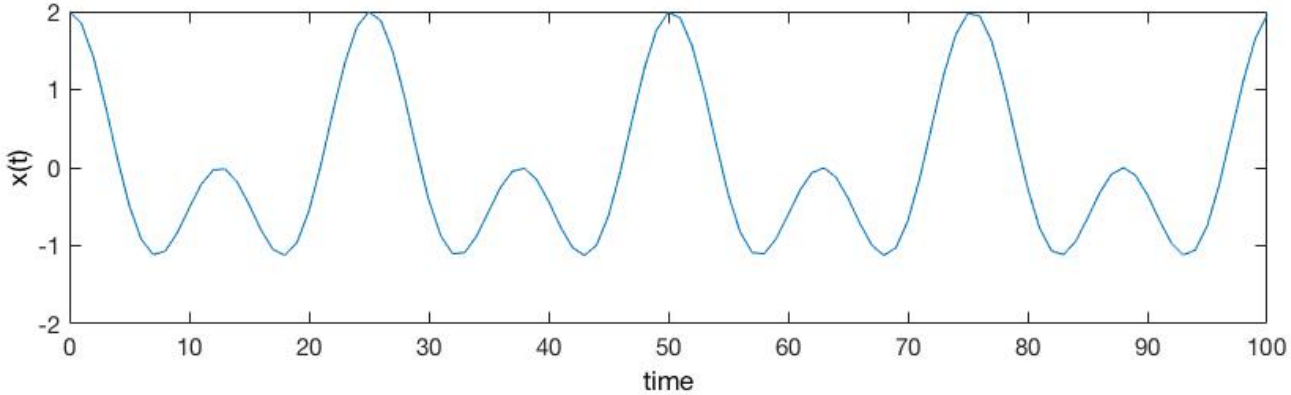
DFT IN MATLAB

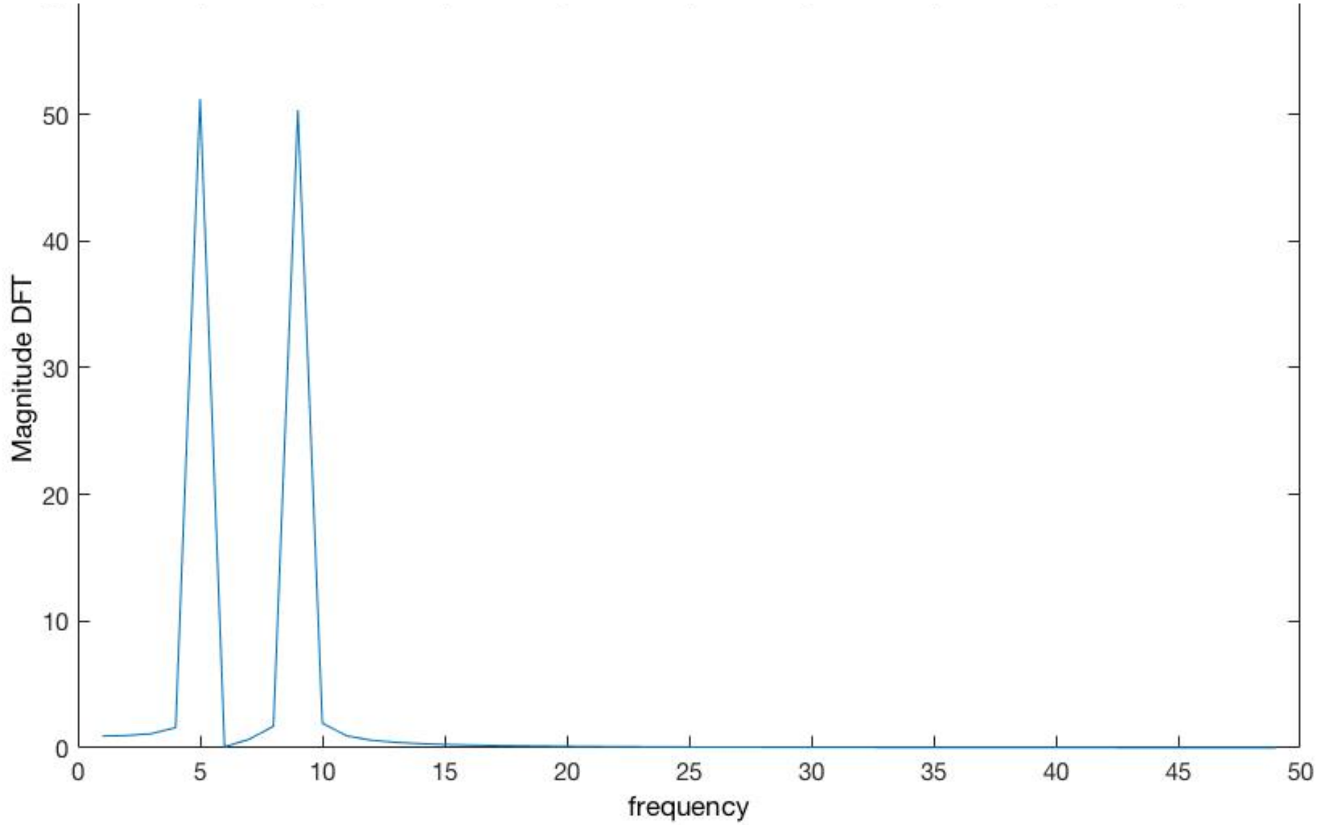
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

```
fft Discrete Fourier transform.
   fft(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.  For
   matrices, the fft operation is applied to each column. For N-D
   arrays, the fft operation operates on the first non-singleton
   dimension.
```

```
DFT1=fft(c);
mag1=abs(DFT1);
n=length(mag1);
figure; plot(mag1(1:n/2-1));
```

ESEMPIO





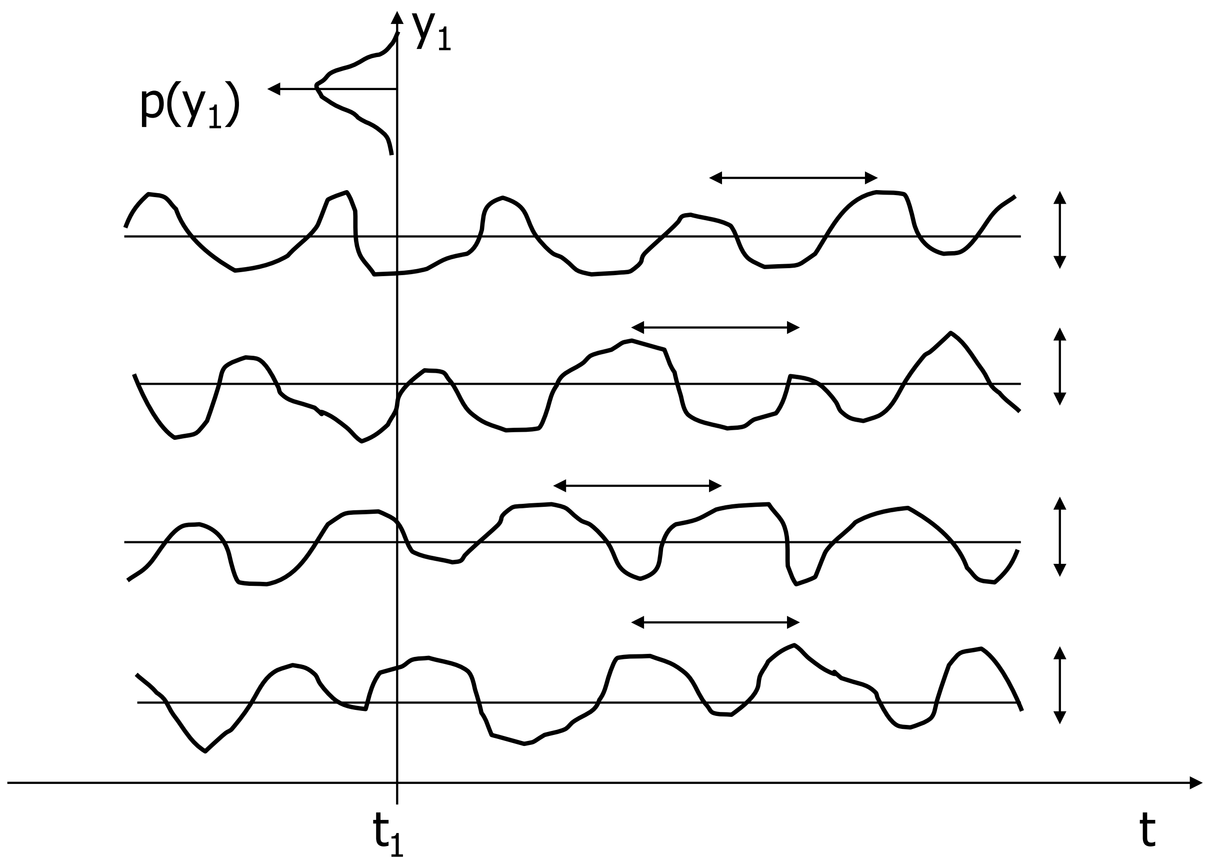
CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

- deterministico
  - periodico
    - sinusoidale
    - non sinusoidale
  - non periodico
    - quasi periodico
    - transiente
- stocastico
  - stazionario
    - ergodico
    - non ergodico
  - non stazionario
    - tipi speciali

PROCESSI STOCASTICI

- Il segnale y(t) è visto come una delle tante possibili realizzazioni di un **processo stocastico**
- Questa impostazione è volta allo studio delle **caratteristiche statistiche** importanti del segnale trascurando gli aspetti casuali



Diverse realizzazioni di un processo stocastico

MOMENTI DI UNA VARIABILE CASUALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Considero una variabile casuale *x* con distribuzione *f(x)*
- Momenti→ descrittori della *f(x)*
- Formula generale

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$g(x) \rightarrow polinomio$$

- Esempi →

$$g(x) = x \rightarrow E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \rightarrow MEDIA$$ Valore attorno a cui f si dispone

$$g(x) = x^2 \rightarrow E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \rightarrow AUTOCORRELAZIONE$$ Dispersione di f attorno alla media

$$g(x) = x^3 \rightarrow E[x^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx \rightarrow SKEWNESS$$ Asimmetria di f

$$g(x) = x^4 \rightarrow E[x^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx \rightarrow KURTOSIS$$ Grado di appiattimento di f attorno al suo centro

MOMENTI DI UNA VARIABILE CASUALE

- In generale,

$$m_r = E[x^r]$$

- La conoscenza di **tutti i momenti** determina esattamente la ***f***

▪Se f è **normale**, la conoscenza del **primo e del secondo momento** è sufficiente per descrivere completamente la distribuzione

▪**Momento centrato** → considero la distribuzione come se fosse centrata sullo zero (media nulla)

$$g(x) = (x-m)^n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^n f(x)dx$$

$$g(x) = (x-m)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx \rightarrow VARIANZA$$

MOMENTI DI INSIEMI DI VARIABILI CASUALI

- Considero un vettore aleatorio discreto (insieme di n variabili casuali)

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

- Nel caso vettoriale si deve introdurre il concetto di **densità congiunta**

$$p(X) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) \qquad x_i \rightarrow indip$$

- L'ordine r totale del momento del vettore è definito dalla somma delle potenze r_i delle singole variabili

$$m_{r=r_1+r_2+\ldots+r_n} = E[x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}]$$

- Se $r_1=r_2=..=r_n=1$ si ottiene il momento n-esimo del vettore

$$m_n = E[x_1 x_2 \ldots x_n]$$

MOMENTI DI PROCESSI STOCASTICI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Considero un processo stocastico

$$Y(t) = \{y(t_1), y(t_2), \dots y(t_n)\}$$

Ad ogni rilevazione k del processo, la sequenza cambia

	variabili rilevate		
tempo	Y_1		Y_k
t_1	y_{11}	$\vdots$	y_{k1}
t_2	y_{12}	$\vdots$	y_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_n	y_{1n}	$\vdots$	y_{kn}

- La distribuzione di probabilità dell'intero processo è caratterizzata completamente dall'insieme di tutte le distribuzioni di probabilità delle realizzazioni del processo in ogni istante temporale (Y_{tk}) e delle loro combinazioni per ogni scelta di t_1, …, t_k

- Molto spesso ci si limita alla conoscenza dei momenti (descrittori delle funzioni di probabilità) e, tra questi, si stimano i momenti primi e secondi.

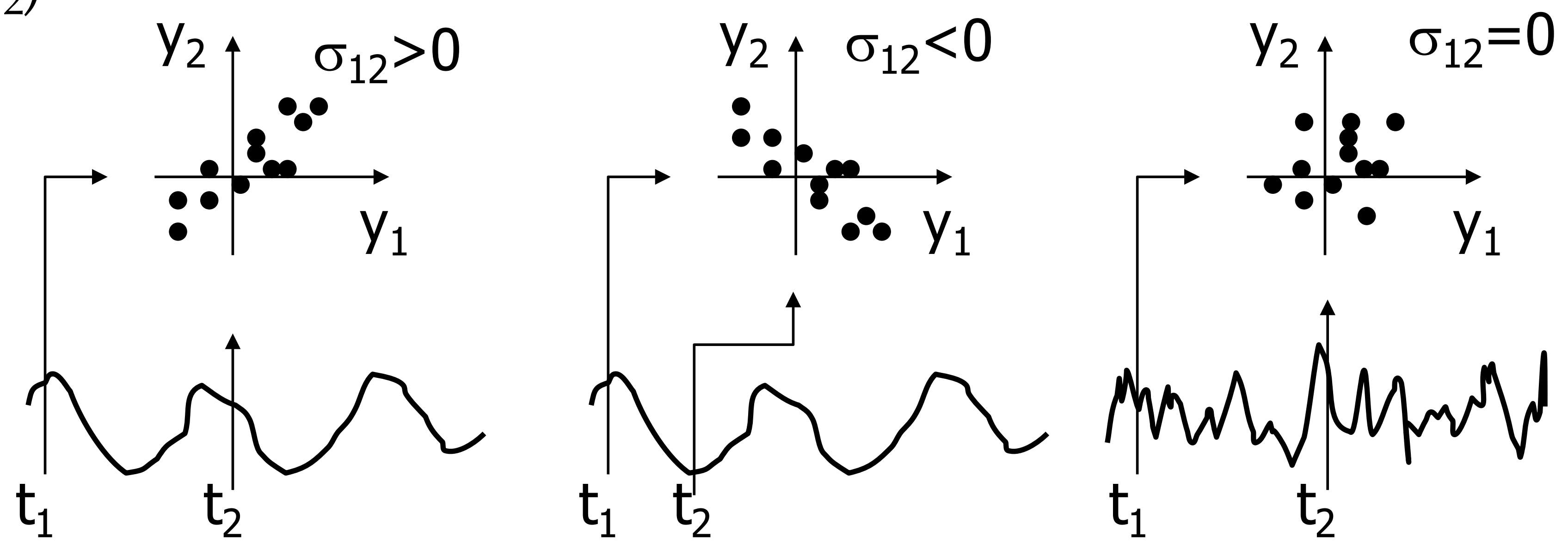
$M_1 = E[Y(t)]$	Media
$M_2 = E[Y(t)^2]$	Varianza
$M_{12} = E[Y(t_1)Y(t_2)]$	Correlazione

CORRELAZIONE E COVARIANZA

Correlazione $M_{12} = E[Y(t_1)Y(t_2)] = \iint Y(t_1)Y(t_2)P\big(Y(t_1), Y(t_2)\big)dy_1 dy_2$

Covarianza $\sigma_{12} = E[(Y(t_1) - E[Y(t_1)])(Y(t_2)E[Y(t_2)])]$

$y_1 = y(k_1)$
$y_2 = y(k_2)$



SERIE TEMPORALI: STAZIONARIETÀ E ERGODICITÀ

- **Stazionarietà =** invarianza nel tempo
  - le proprietà statistiche non dipendono da un riferimento temporale assoluto.
  - $p(y(t))$ deve valere per ogni t e $p(y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_k))$ deve dipendere solo dalle distanze temporali τ $(t_2-t_1, \dots, t_k-t_{k-1})$.

- **Stazionarietà debole** = stazionarietà solo sui momenti di primo e secondo ordine:
  - $M = E[y(t)]$ valor medio costante
  - $\sigma^2 = E[y(t)^2]$ varianza costante
  - $ACF = E[y(t) \cdot y(t+\tau)]$ correlazione dipendente da τ

- **Ergodicità** = ogni elemento del processo è rappresentativo di tutti gli altri, quindi **è possibile stimare le proprietà statische del processo da una sola realizzazione, pur di avere un numero sufficientemente elevato di campioni.**

MEDIA, VARIANZA E ACF NEI SEGNALI ERGODICI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Nei casi concreti si dispone di un numero N finito di campioni → devo stimare le proprietà statistiche da questi N campioni
- **MEDIA CAMPIONARIA**

$$\widehat{E}[y(t)] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(t_i)$$

Per N→ ∞ la media campionaria stima m con incertezza σ/√N

- **AUTOCORRELAZIONE**

ACF NON POLARIZZATA

$$\widehat{ACF}(k) = \frac{1}{N-k-1}\sum_{i=0}^{N-k-1} \left(y(t_i) - \widehat{E}[y(t)]\right)\left(y(t_{i+k}) - \widehat{E}[y(t)]\right)$$

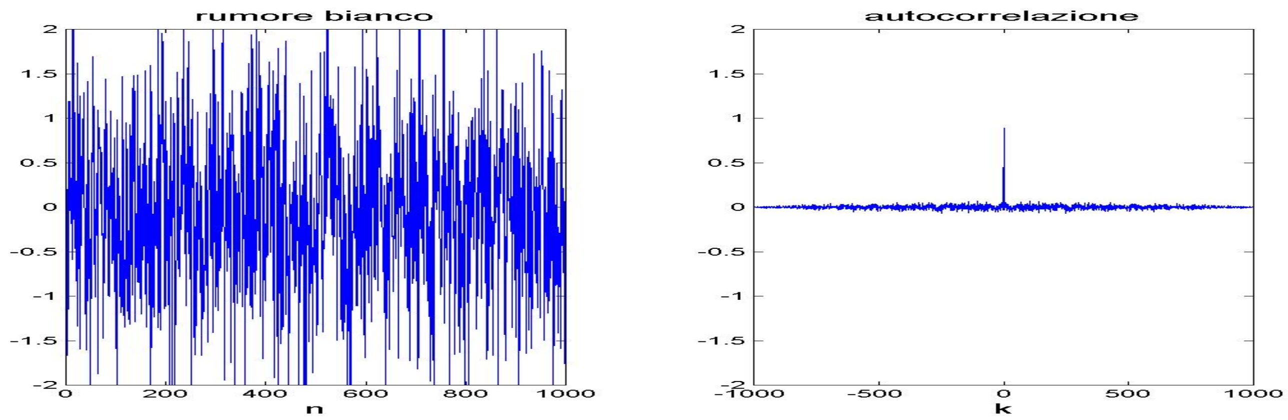
ACF POLARIZZATA

$$\widehat{ACF}(k) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-k-1} \left(y(t_i) - \widehat{E}[y(t)]\right)\left(y(t_{i+k}) - \widehat{E}[y(t)]\right)$$

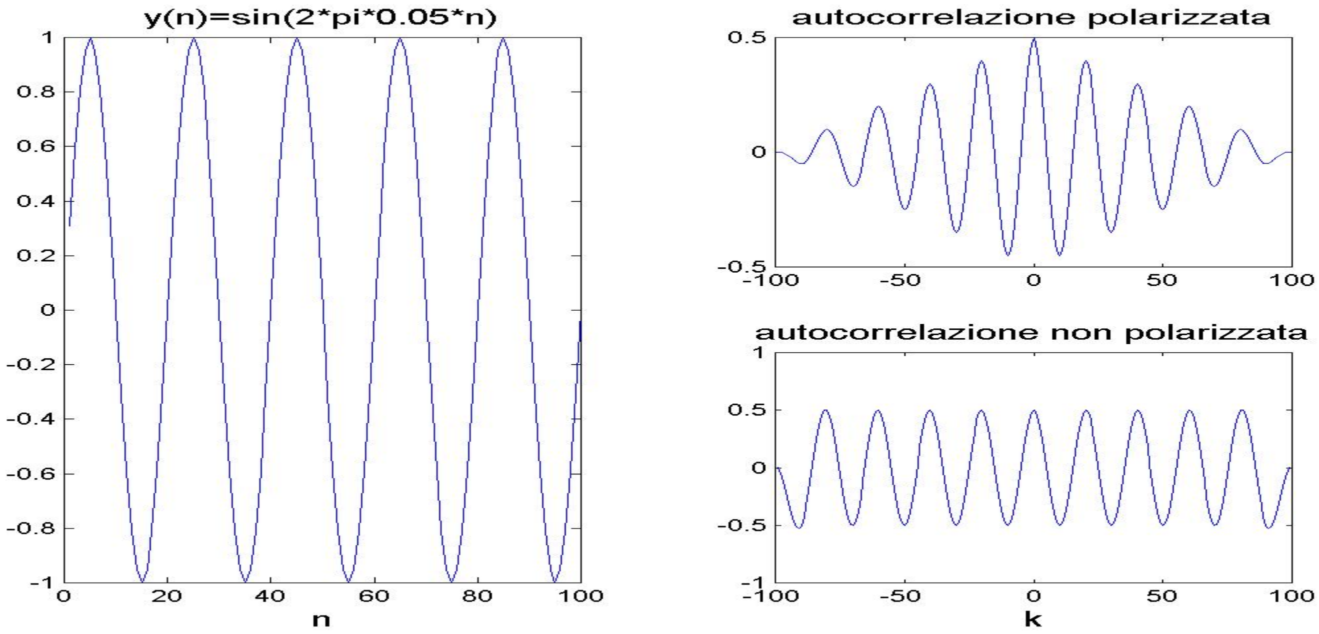
La stima NON POLARIZZATA utilizza come fattore di pesatura tutti i campioni disponibili fino al tempo k (N-k-1), mentre la stima POLARIZZATA divide sempre per tutti i campioni disponibili (N-1)

ESEMPI

Rumore bianco

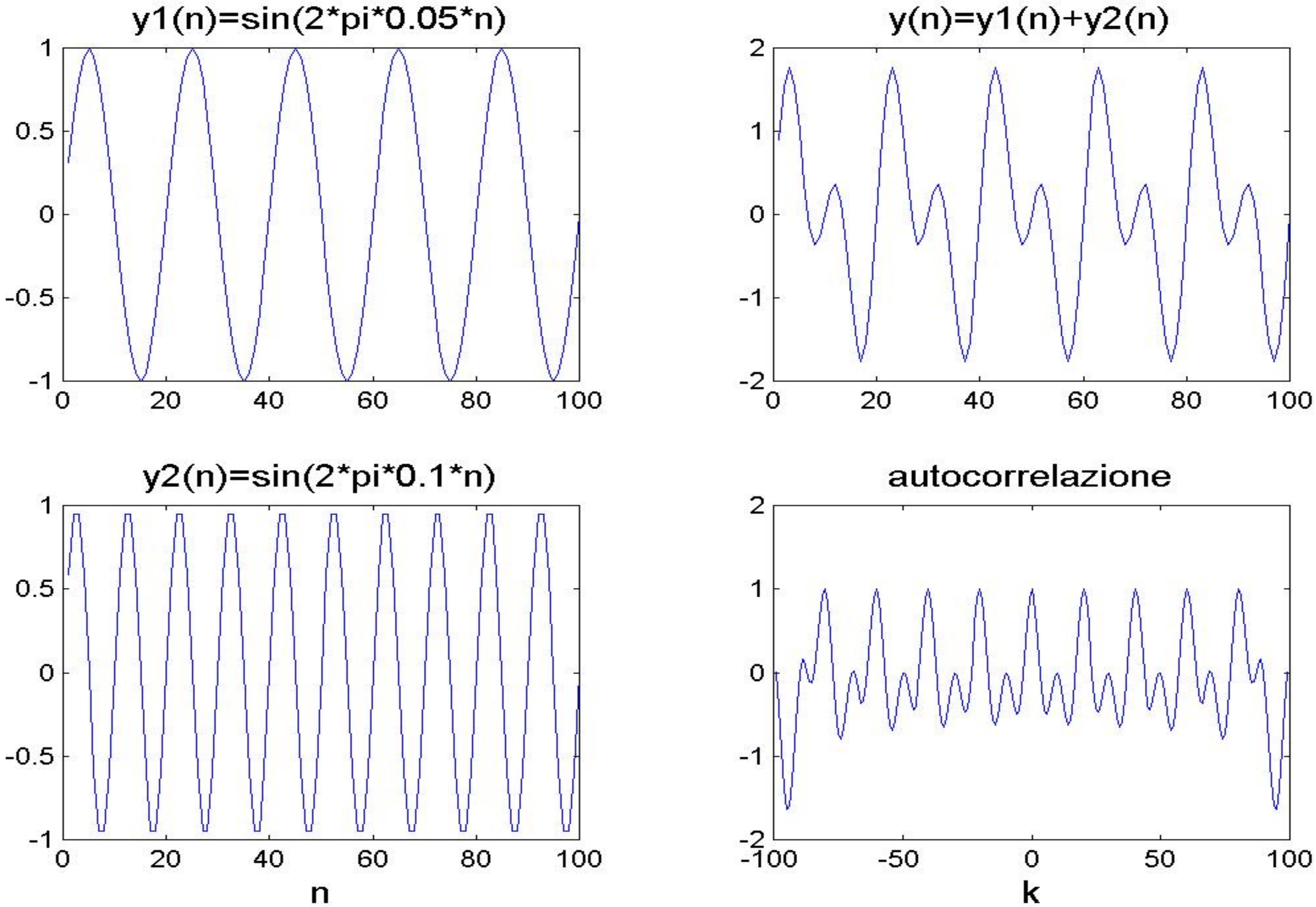


Sinusoide

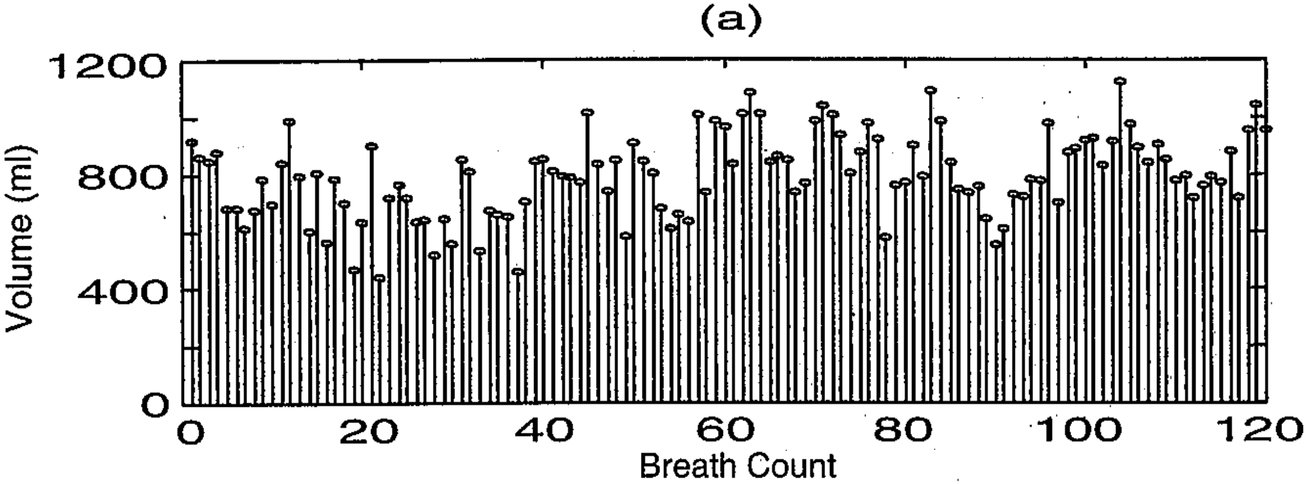


ESEMPI

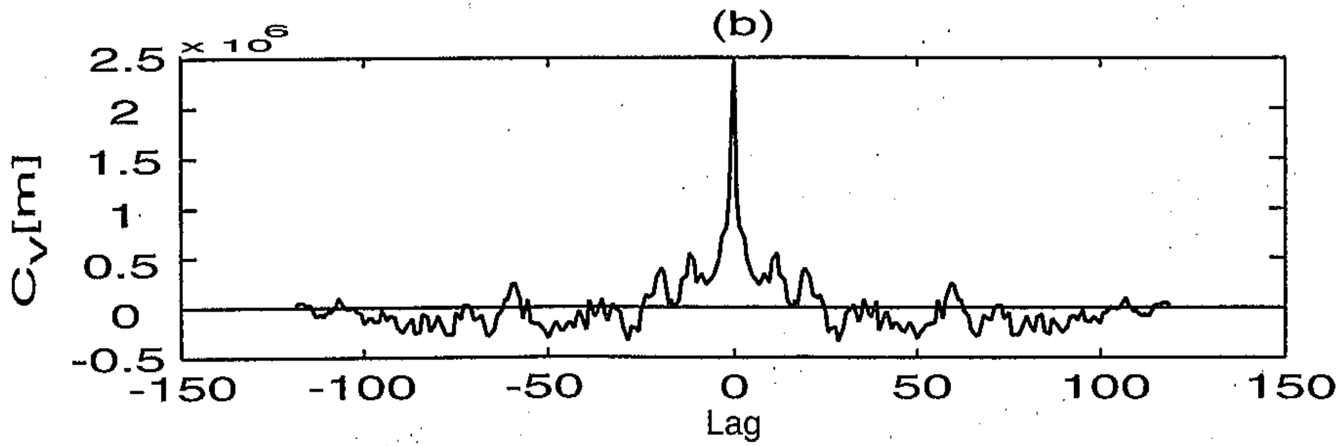
Somma di Sinusoidi



SEGNALI RESPIRATORI



Valori di volume respiratorio (120 respiri) in un soggetto umano.



ACF dei dati di volume respiratorio considerato come un segnale a tempo discreto.

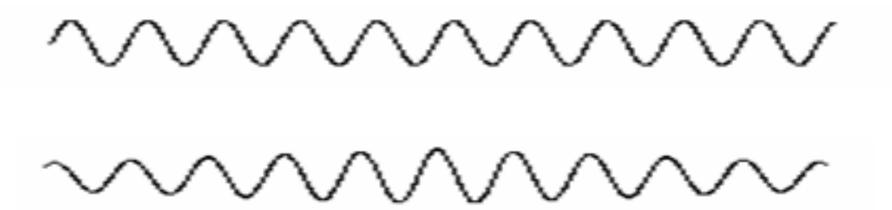
AUTOCORRELAZIONE: IN SINTESI

RUMORE BIANCO

simile a se stesso; campioni scorrelati

funzione di autocorrelazione → spike

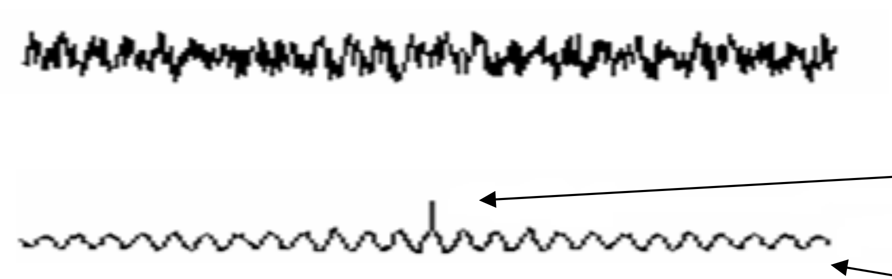
SEGNALE PERIODICO



in fase o meno a seconda dello shift

funzione di autocorrelazione → periodica

SEGNALE PERIODICO + RUMORE



funzione di autocorrelazione:

- riduce il rumore nello spike
- lascia il seno periodico

CROSS-CORRELAZIONE

Dati due processi stocastici stazionari ergodici

$y_1(t)$

$y_2(t)$

Definisco la cross correlazione come:

$$\boldsymbol{C_{12}(k) = E[y_1(i)y_2(i+k)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y_1(i)y_2(i+k)}$$

Rappresenta la covarianza dei due segnali valutata a distanza k (lag temporale)

ESEMPIO

Considero

$$x(t)=\cos(0.5t)+\cos(0.25t);$$
$$y(t)=\cos(0.5t)+\cos(0.5t+f);$$

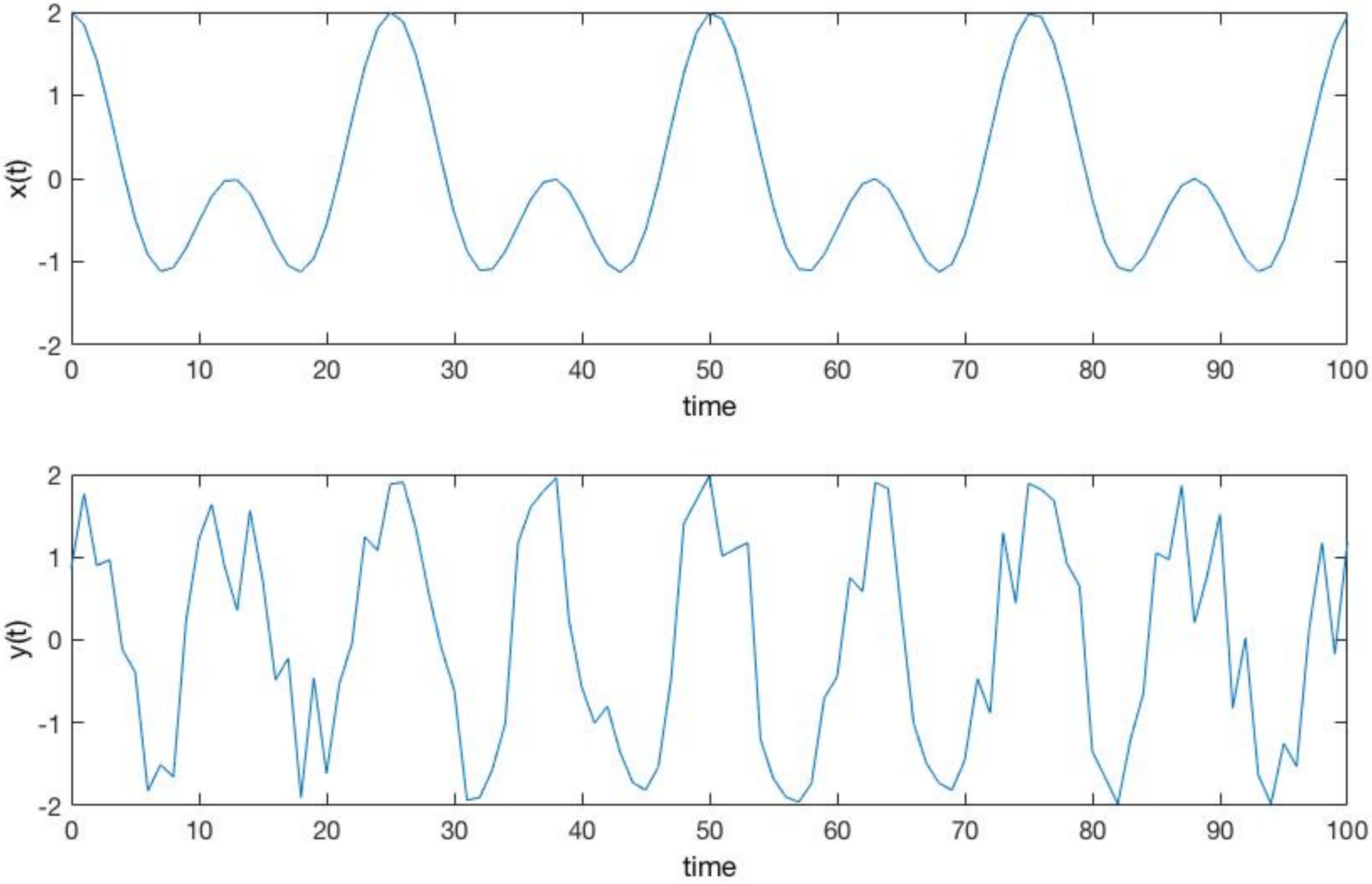
dove, f=rand(length(t));

```
t=[0:100];
fi=randn(size(t));
a=cos(0.5*t);
b=cos(0.25*t);
c=a+b;
a2=cos(0.5*t+fi);
d=a+a2;
figure; subplot (2,1,1); plot(t,c); subplot (2,1,2); plot(t,d);
[acf1,lag1]=autocorr(c, length(c)-1);
[acf2,lag2]=autocorr(d,length(d)-1);
figure; subplot (1,2,1); plot(-lag1,acf1,'b');hold on;
plot(lag1,acf1,'b'); subplot (1,2,2); plot(-lag2,acf2,'b');hold on; plot(lag2,acf2,'b');
[ccf,lag]=crosscorr(c,d,length(c)-1);
figure;plot(lag,ccf,'r');
```

SEGNALI PERIODICI A 0.5 E 0.25

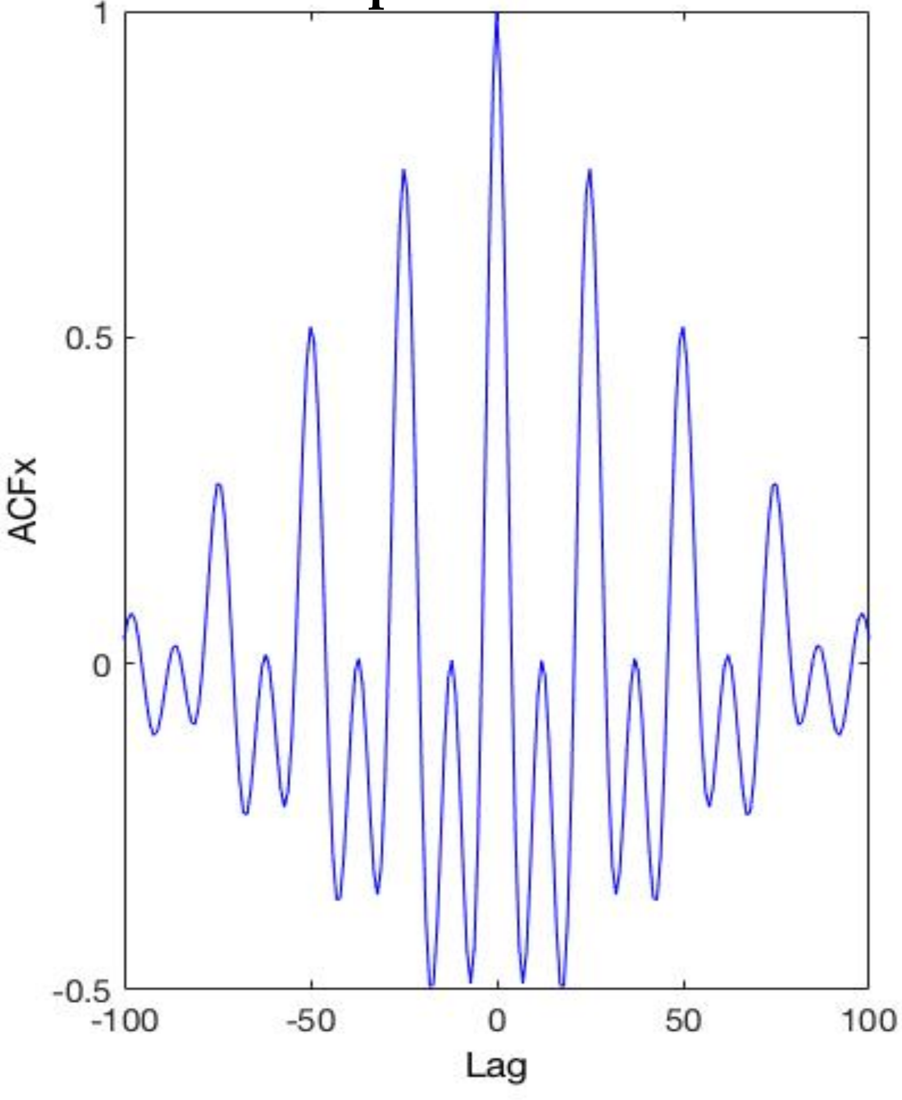
FASE RANDOMIZZATA

ESEMPIO

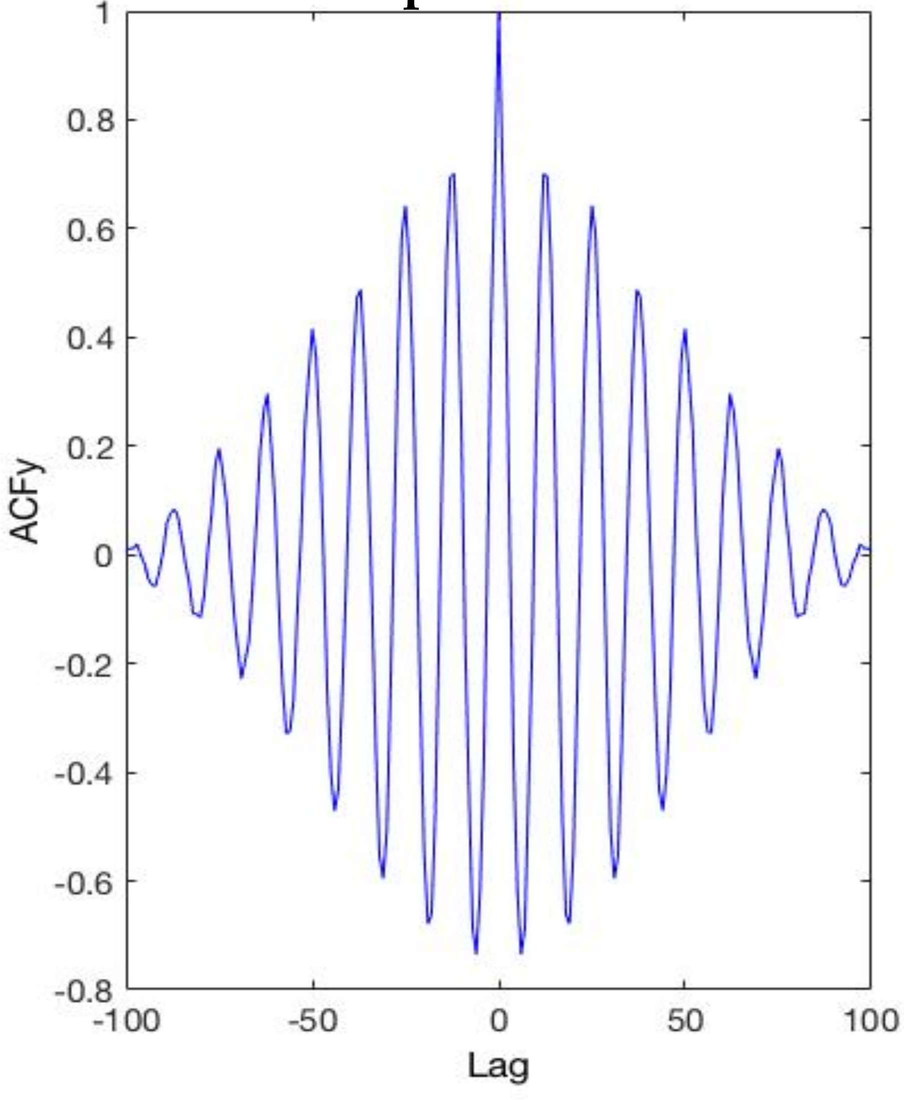


ESEMPIO

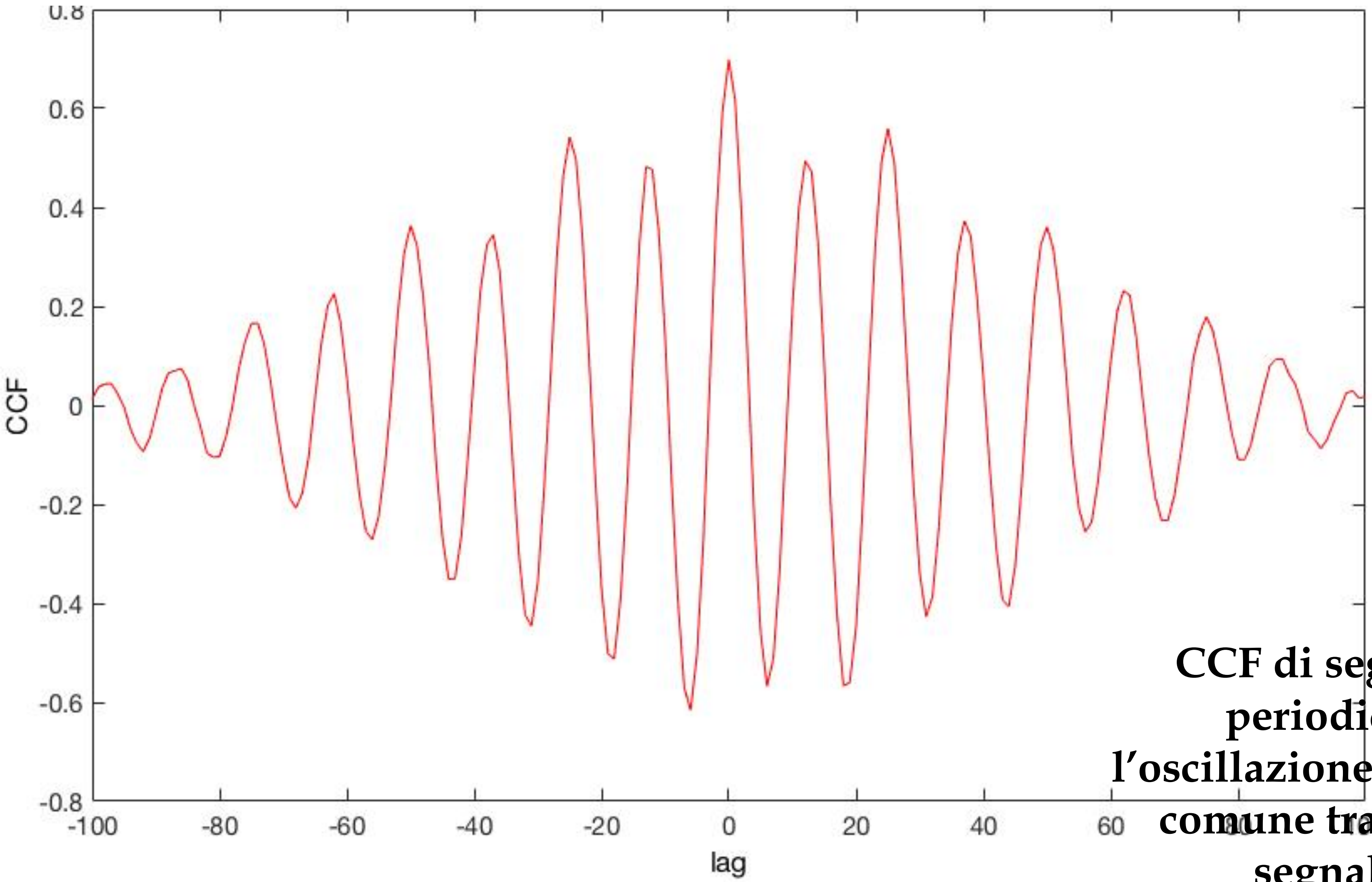
x(t) ha una doppia periodicità



y(t) ha una sola periodicità



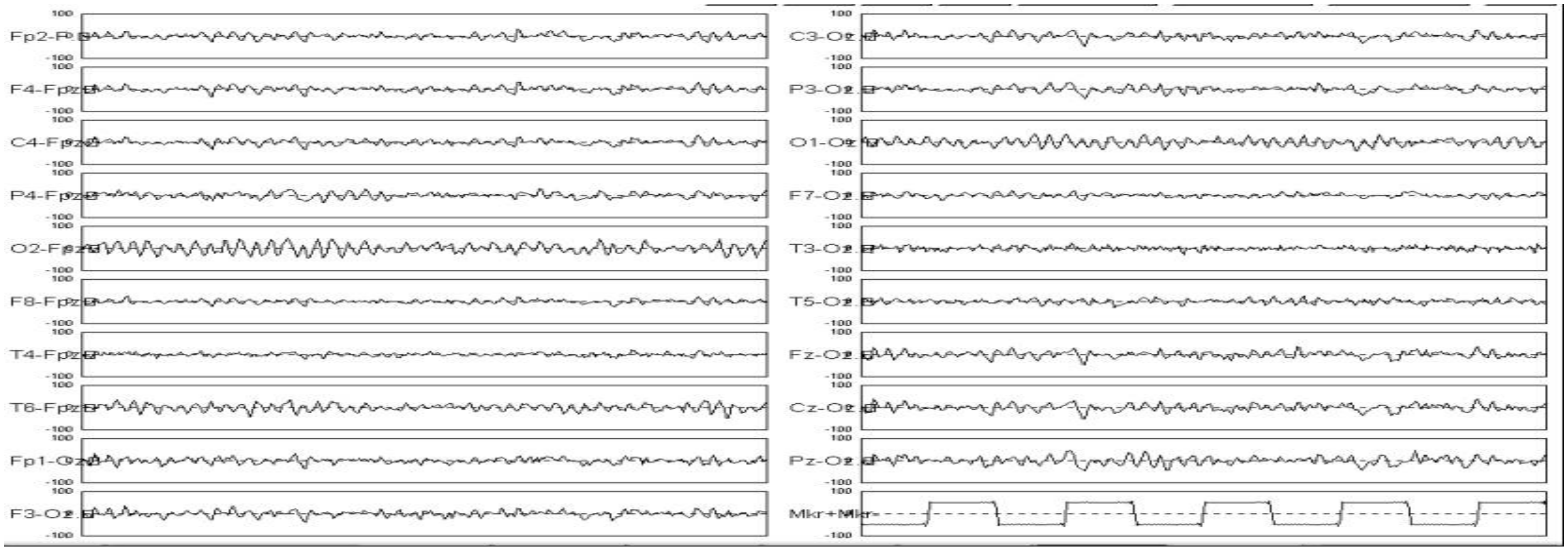
ESEMPIO



CCF di segnale periodico: l’oscillazione 0.5t è in comune tra i due segnali

ESEMPIO: TRACCIATO EEG NORMALE

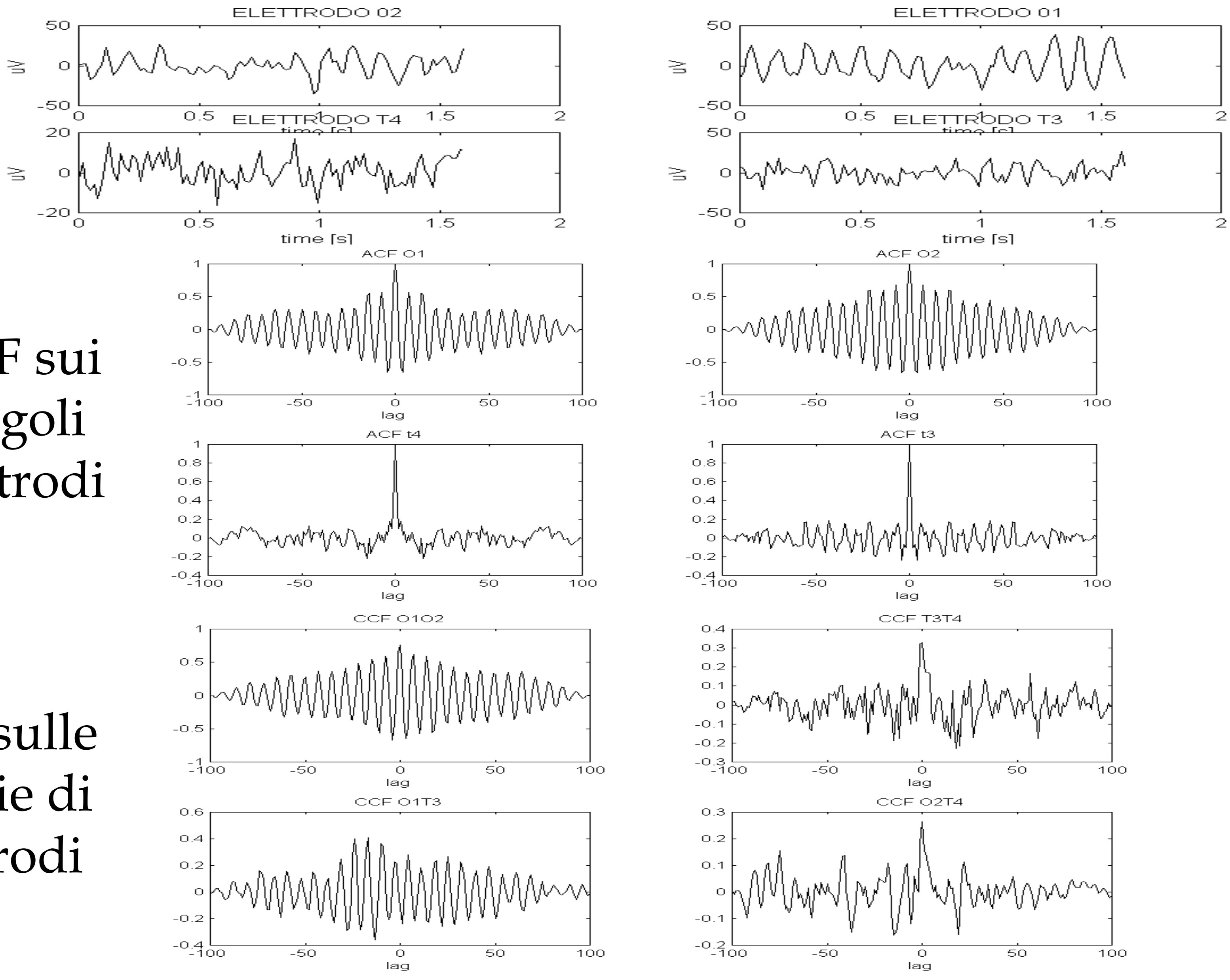
- non periodico, ma spesso con un ritmo prevalente su specifiche bande di frequenza
- le caratteristiche variano con la derivazione
- possono presentarsi similitudini e sincronismi fra derivazioni



→ si valuta la presenza di ritmi prevalenti con la stima della ACF

→ si valuta la presenza di sincronismi tra derivazioni con la stima della CCF

ESEMPIO: TRACCIATO EEG NORMALE



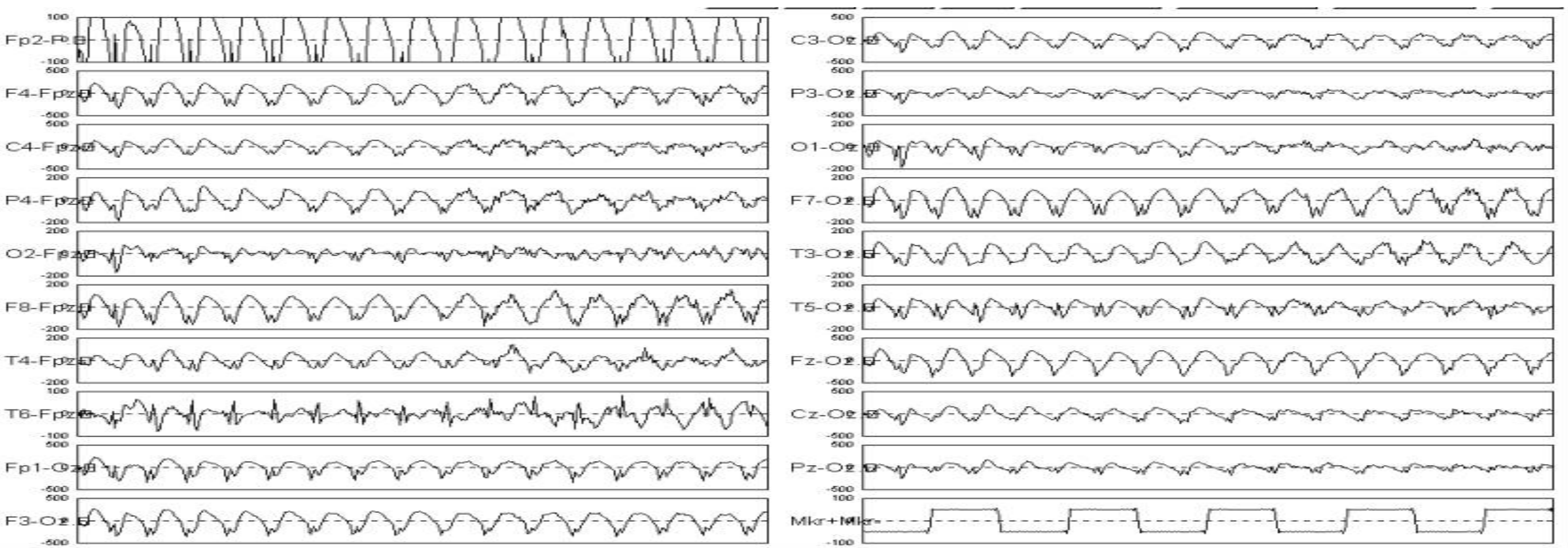
ACF sui singoli elettrodi

CCF sulle coppie di elettrodi

ESEMPIO: TRACCIATO EEG DURANTE CRISI EPILETTICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Crisi epilettica generalizzata: segnale periodico, con morfologia caratteristica "punta onda"
- le caratteristiche variano con la derivazione
- notevoli similitudini e sincronismi fra derivazioni

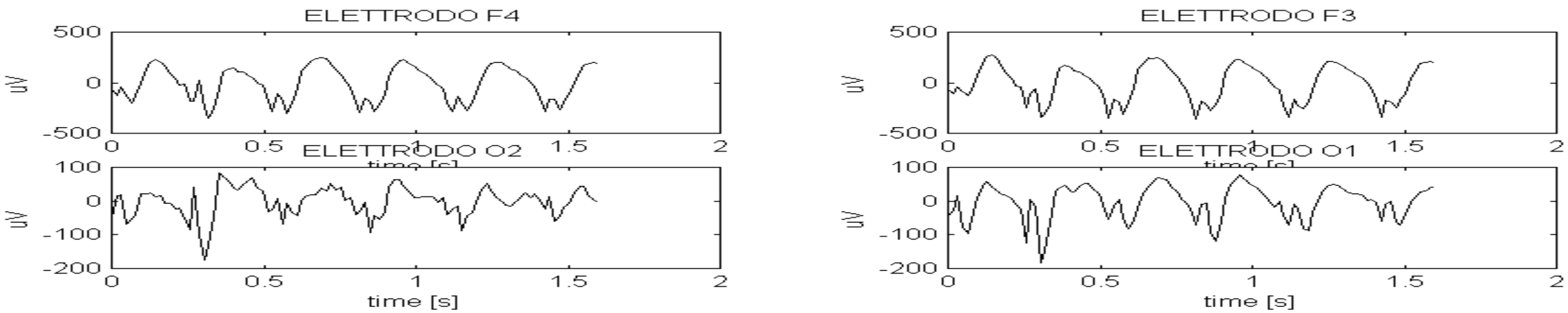


stima della ACF

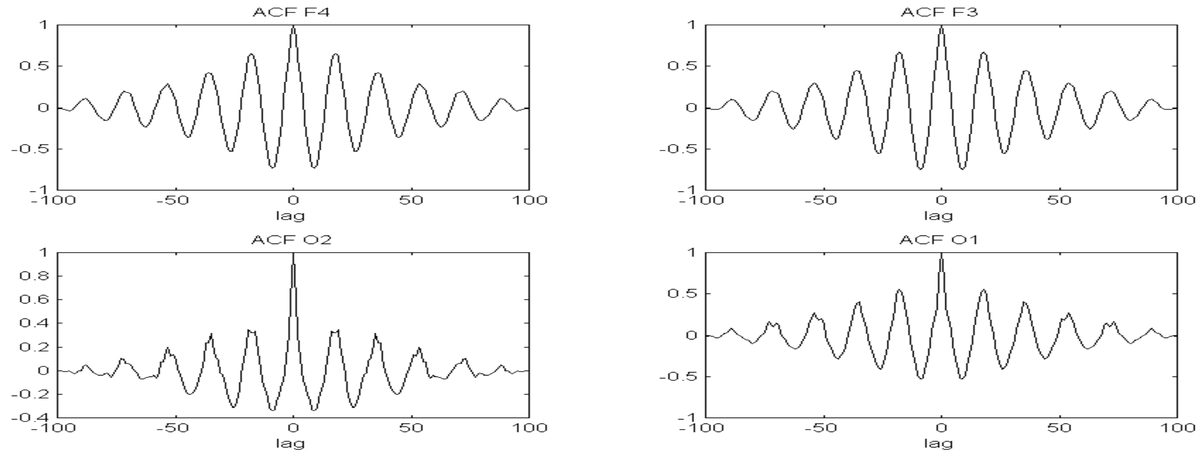
stima della CCF

ESEMPIO: TRACCIATO EEG DURANTE CRISI EPILETTICA

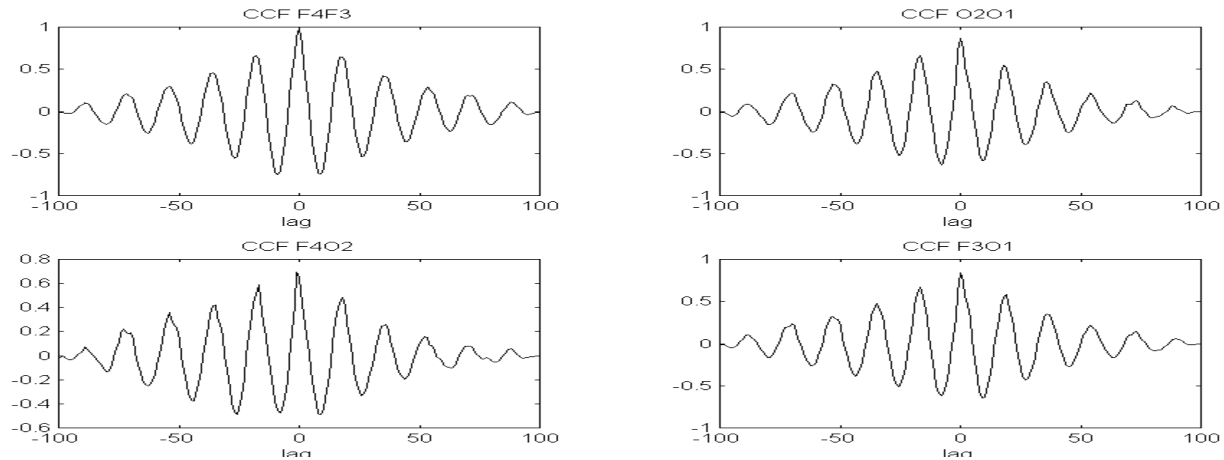
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



ACF sui singoli elettrodi



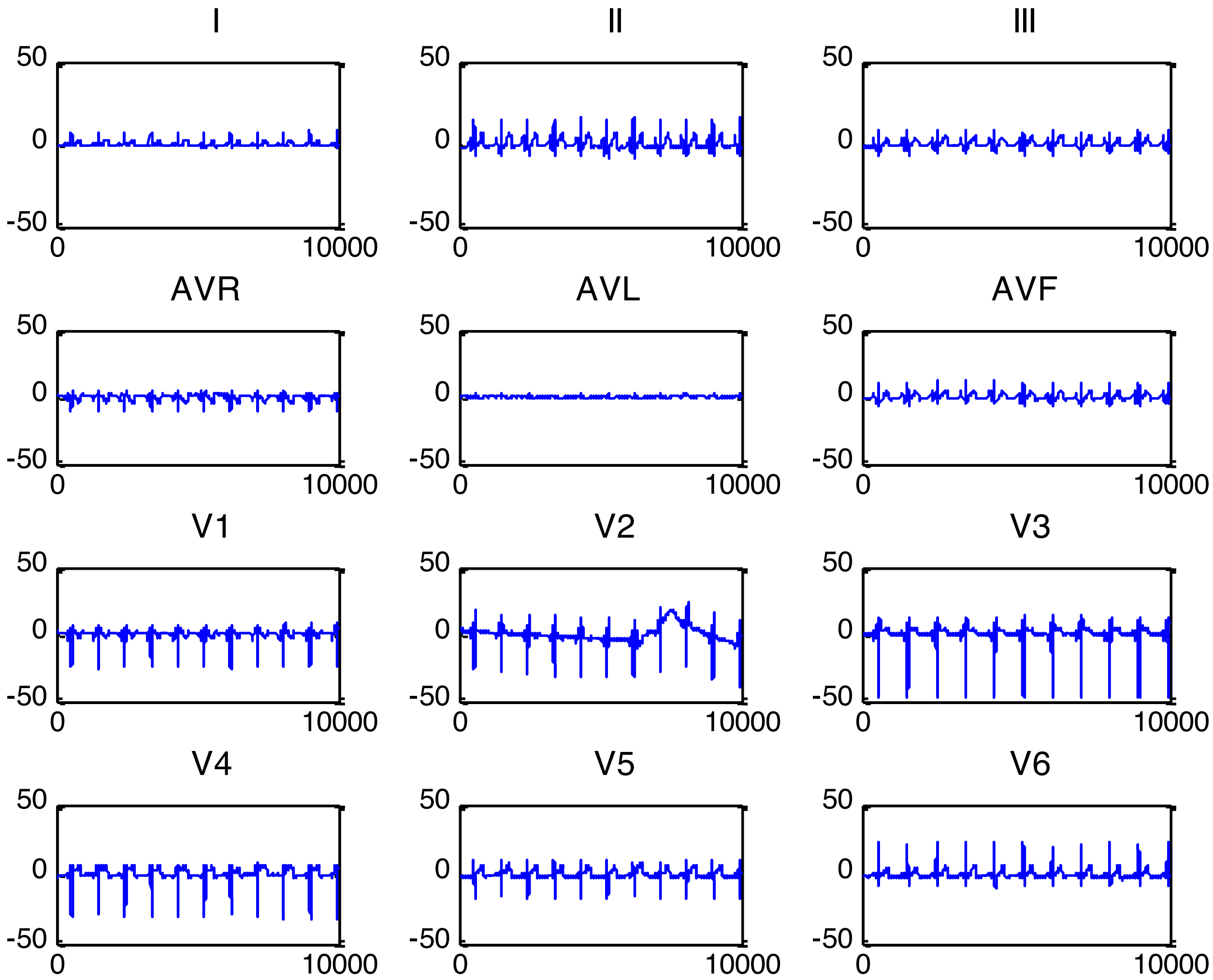
CCF sulle coppie di elettrodi



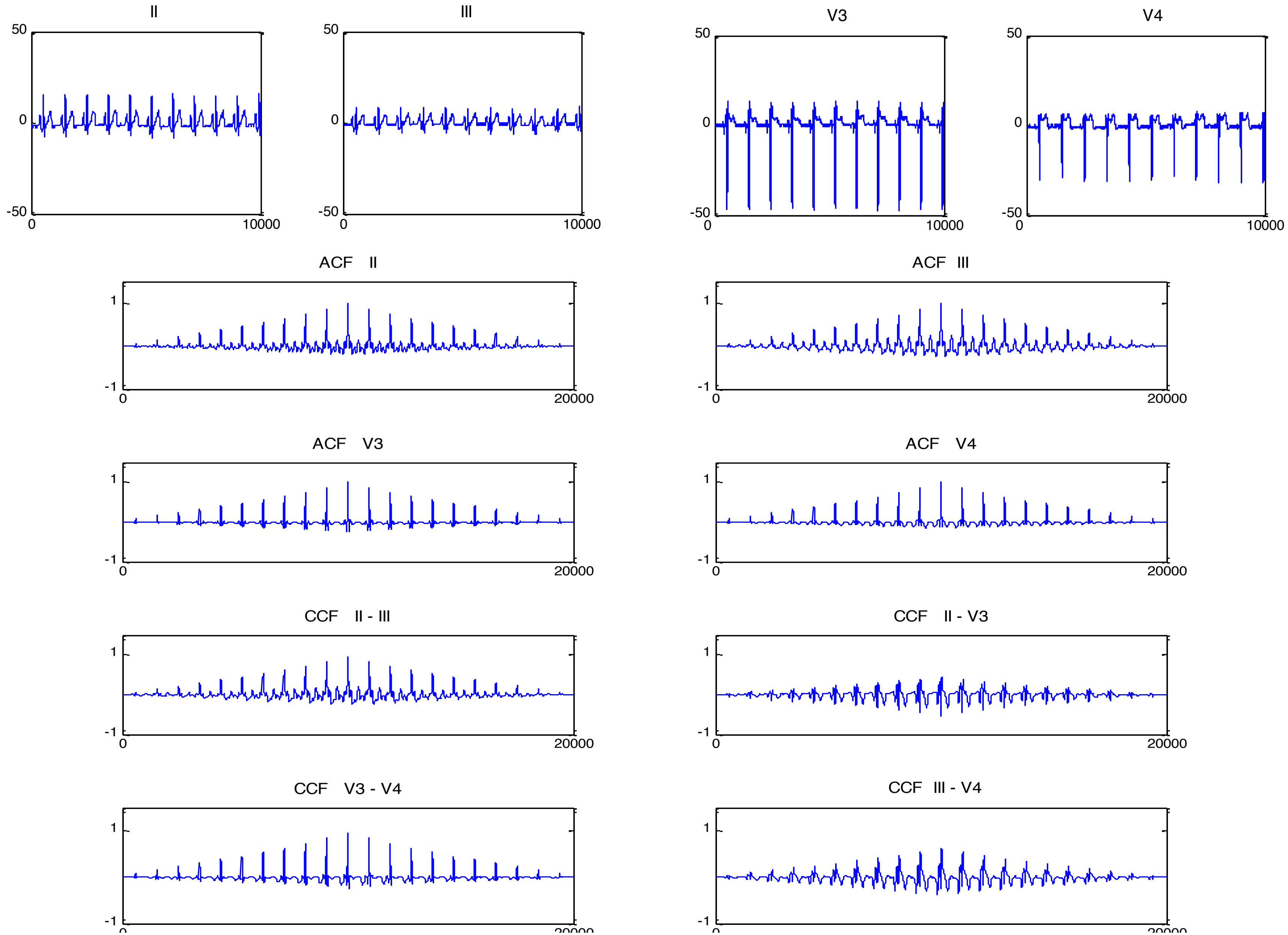
ESEMPIO: TRACCIATO ECG NORMALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- deterministico
- quasi-periodico
- segnali sincronizzati con se stessi e con le altre derivazioni

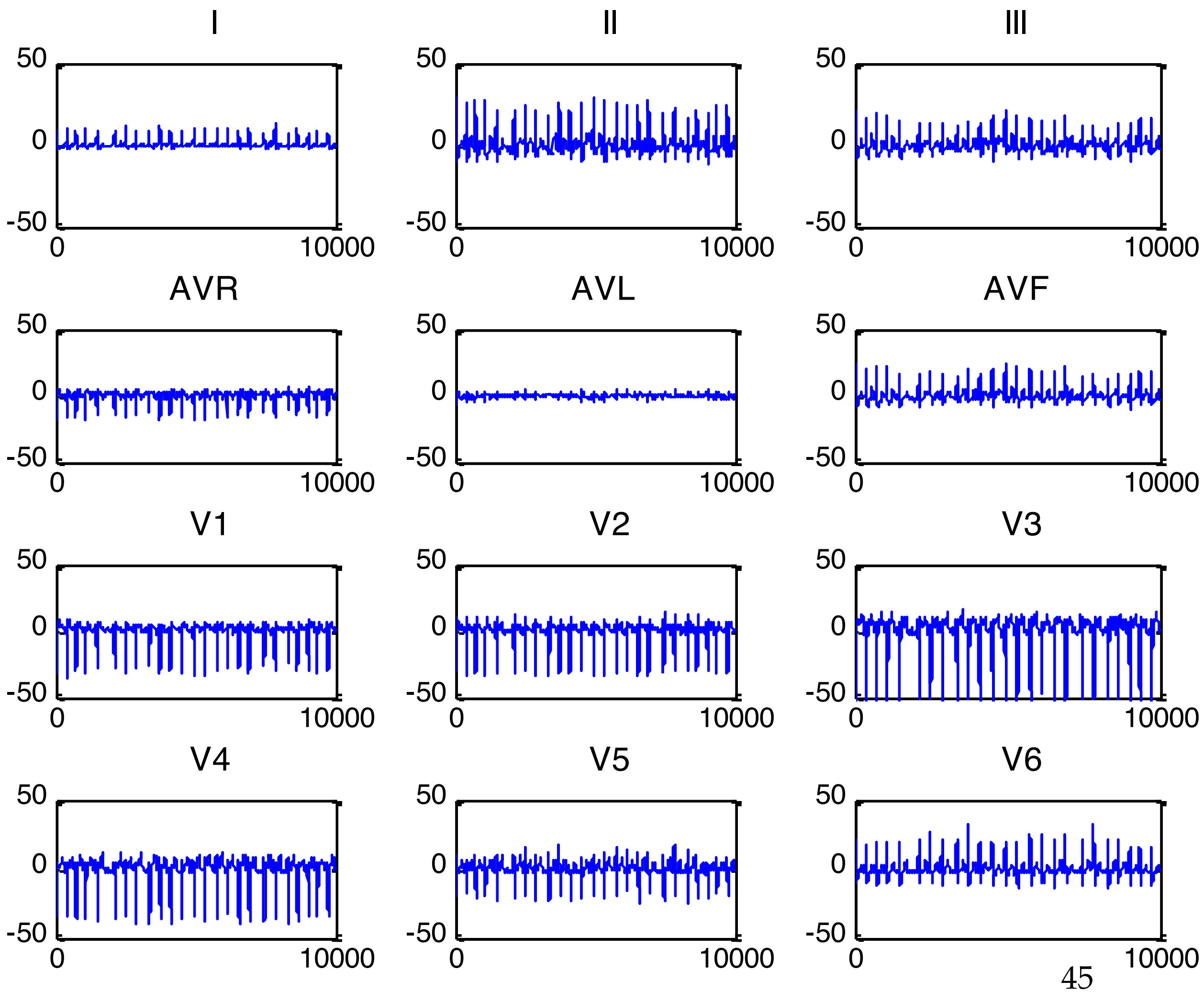


ESEMPIO: TRACCIATO ECG NORMALE



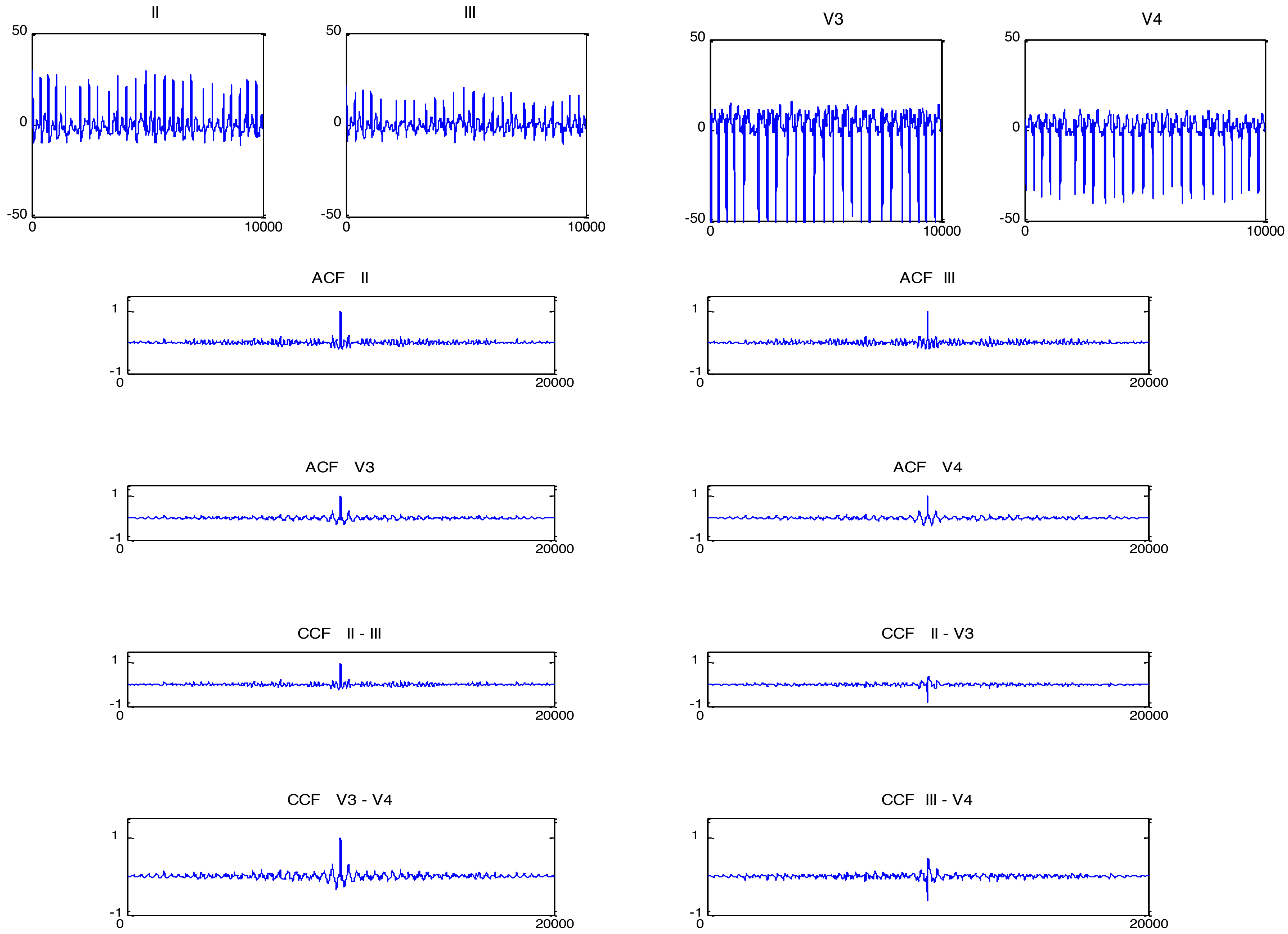
ESEMPIO: TRACCIATO ECG DURANTE FIBRILLAZIONE ATRIALE

segnale perde sincronizzazione con se stesso e con le altre derivazioni



ESEMPIO: TRACCIATO ECG DURANTE FIBRILLAZIONE ATRIALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



LO SPETTRO DI POTENZA

- Analisi spettrale →
  - Permette di stimare, grazie all'assunzione di ergodicità, oscillazioni che si ripetono in modo statisticamente significativo, anche su un finestra limitata di N campioni
  - Mette in luce le oscillazioni contenute in un segnale stocastico stazionario e ergodico

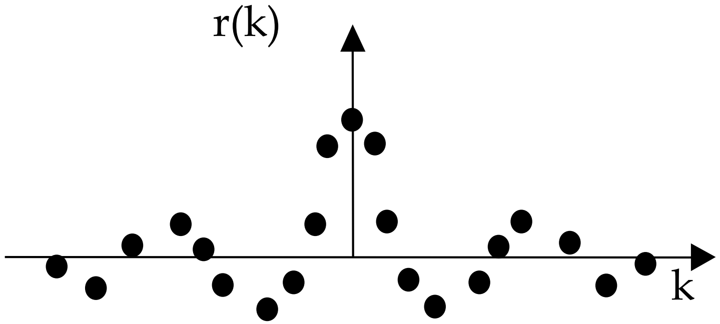
- Lo spettro di potenza viene calcolato come la **TRASFORMATA DI FOURIER della funzione di AUTOCORRELAZIONE** (teorema di Wiener-Khinchin)

$$\boldsymbol{P(f) = FT[ACF(k)]}$$

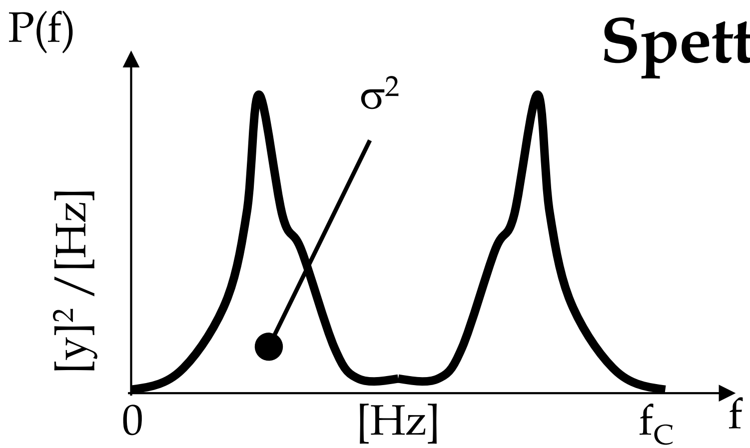
SPETTRO DI POTENZA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

ACF



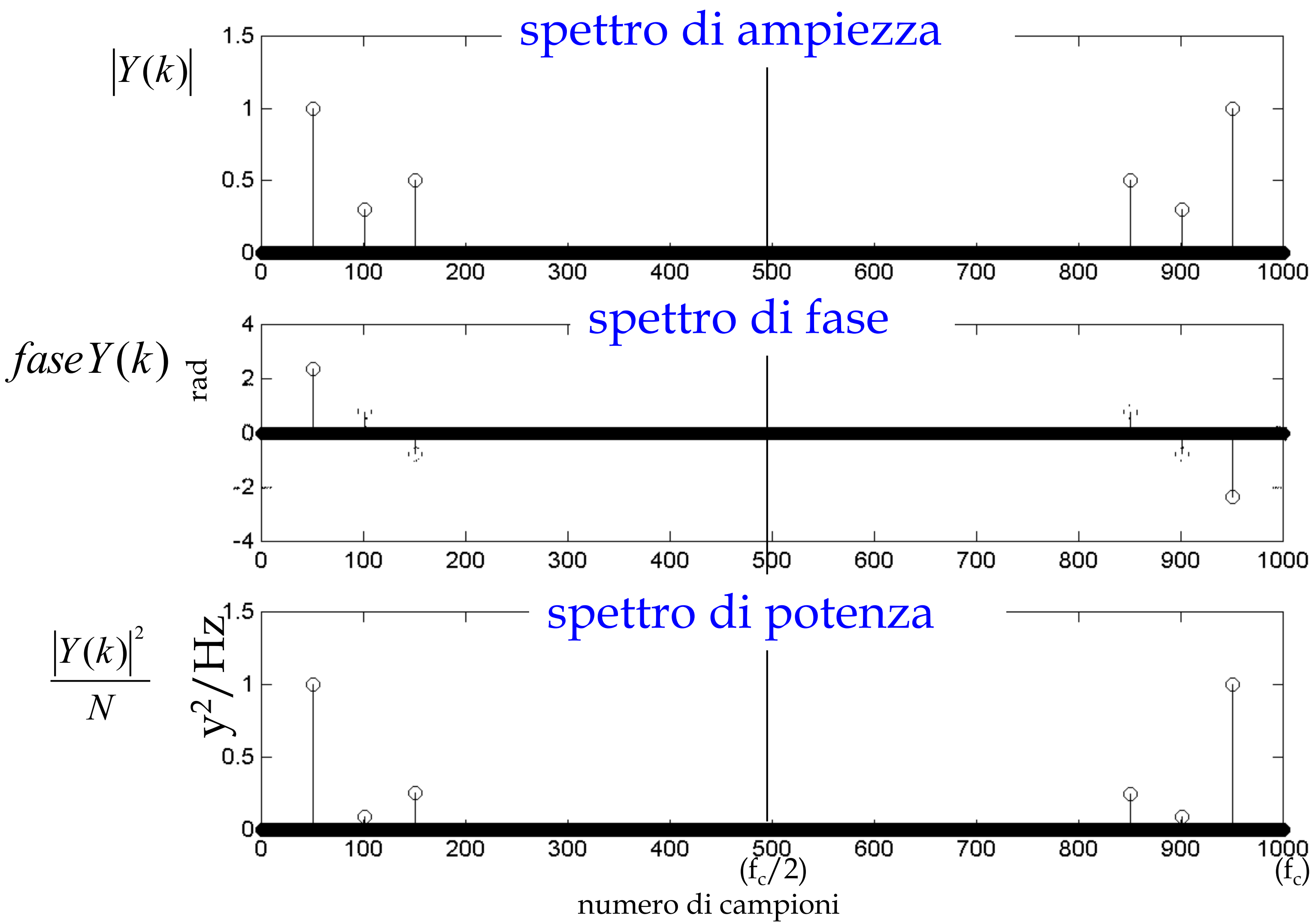
Spettro



L'integrale dello spettro coincide con la ACF(0) → varianza del segnale

ANALISI SPETTRALE: SPETTRI DALLA DFT

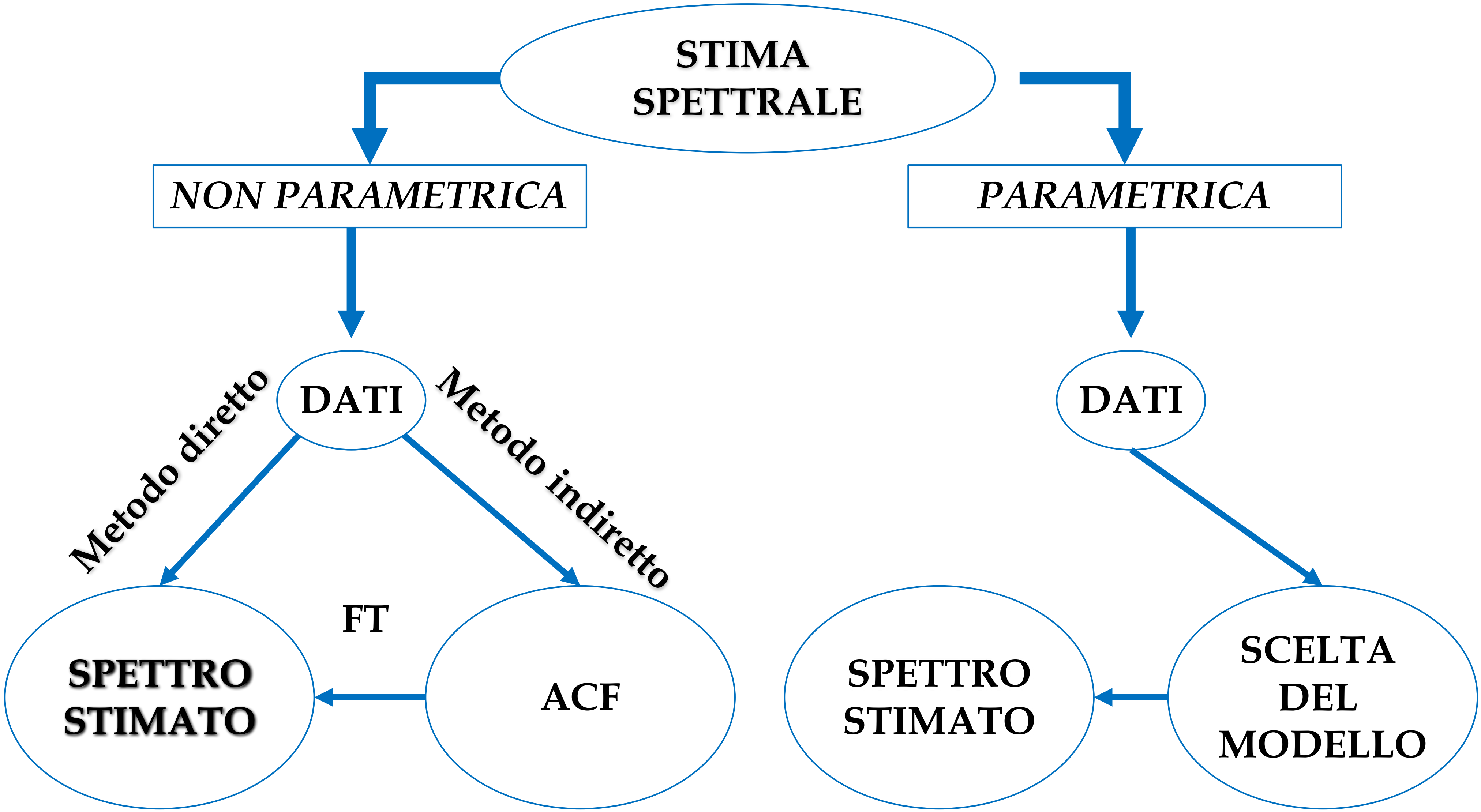
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



risoluzione spettrale
$\Delta f = f_C/N$

in pulsazioni normalizzate
$\Delta\Omega = 2\pi/N$

METODI DI STIMA SPETTRALE



METODO DIRETTO: PERIODOGRAMMA DI SCHUSTER

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dato il segnale x(n), calcolo direttamente la densità spettrale di potenza (P(f))

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{N\Delta t}\left|\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n\Delta t}\right|^2 = \frac{1}{T}|X(k)|^2$$

Coefficienti della DFT

- Il periodogramma ha un problema di consistenza statistica, in quanto la varianza della stima non tende a 0 all'aumentare di N
- Vengono utilizzati altri metodi (Bartlett, Welch) che suddividono il segnale in finestre prima di calcolare il periodogramma

METODO DIRETTO: METODO DI BARTLETT

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Si divide il segnale in K segmenti di M campioni

↓

Si sottrae la media ad ogni segmento

↓

Si calcola il periodogramma per ogni segmento i-esimo

↓

Spettro → media dei periodogrammi calcolati per ogni segmento

METODO DIRETTO: OSSERVAZIONI

- Con il metodo di Bartlett la varianza della stima tende a 0 all'aumentare di N (medio più periodogrammi)
- Perdita di RISOLUZIONE IN FREQUENZA:
  - La RISOLUZIONE SPETTRALE è la capacità di distinguere due frequenze

$$\Delta f = \frac{f_c}{N}$$

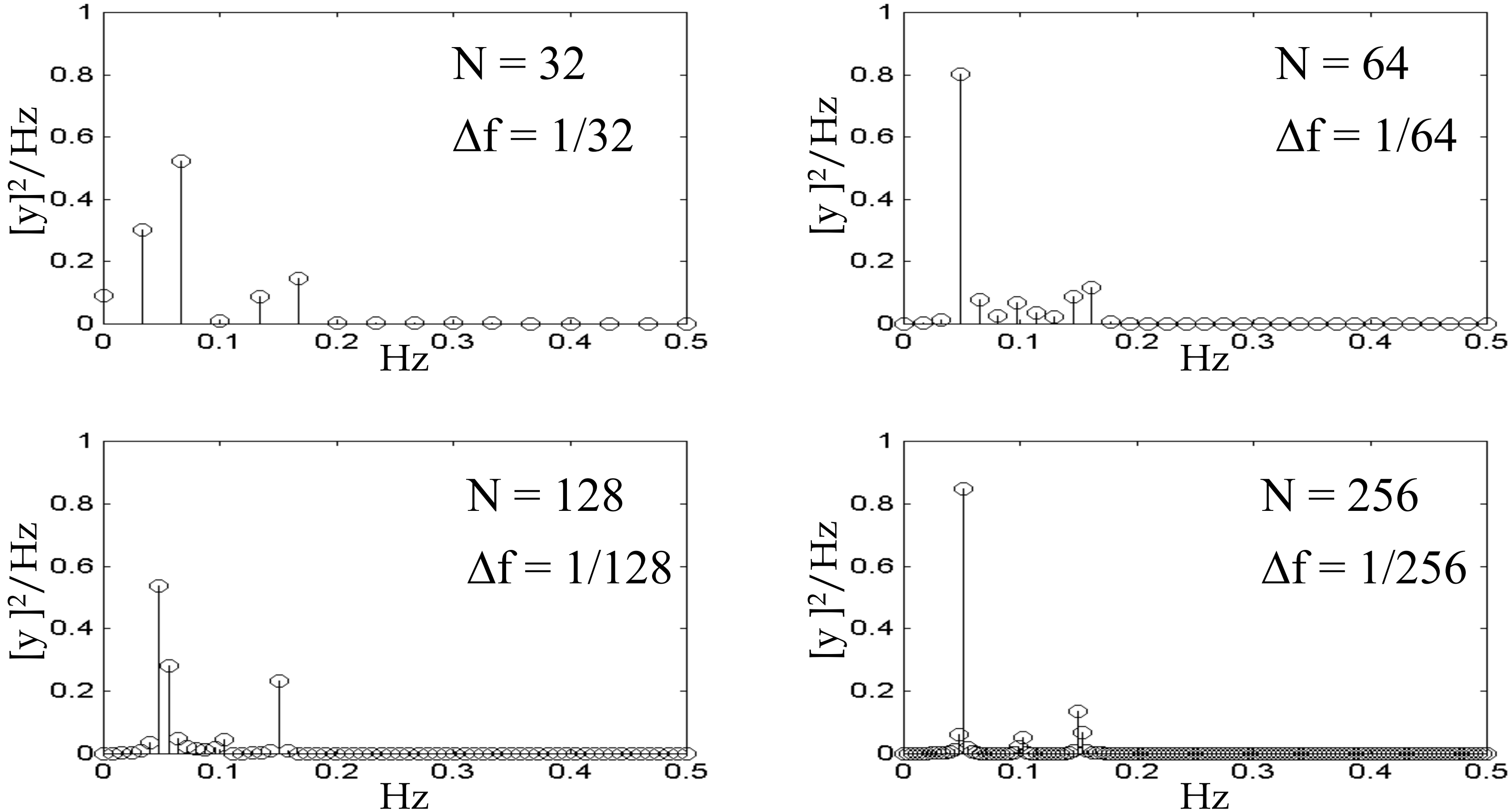
Frequenza di campionamento

Numero di campioni

  - Con il metodo di Bartlett il numero di campioni su cui calcolo il periodogramma è minore (M invece che N)
  - Lo zero padding (aumento virtuale del numero di campioni aggiungendo degli 0 al segnale utile) detremina uno spettroi più denso (in termini di numero di campioni in frequenza) ma NON aumenta la risoluzione

METODO DIRETTO E RISOLUZIONE SPETTRALE

Data la simmetria rispetto alla frequenza di Nyquist ($f_C/2$), gli spettri vengono rappresentati fino a $f_C/2$



Aumentando il numero N di campioni del segnale → Migliora la risoluzione in frequenza dello spettro (Δf)

METODO INDIRETTO DI BLACKMAN E TUKEY

Metodo che ricalca esattamente il teorema di Wiener e Kinchin.

Dato il segnale x(n), tolgo la media in modo da ottenere un segnale a media nulla e calcolo una stima (non polarizzata) della ACF

$$\widehat{ACF}(k) = \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=0}^{N-k-1} x(i)\, x(i+k)$$

Data la ACF stimata, calcolo la P(f) dal teorema

$$\hat{P}(f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{ACF}(n) e^{-j2\pi f n \Delta t}$$

Δt = periodo di campionamento

IL PROBLEMA DELLA FINESTRATURA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

dominio del tempo | dominio della frequenza

Finestratura implicita

considerare un numero finito N di campioni

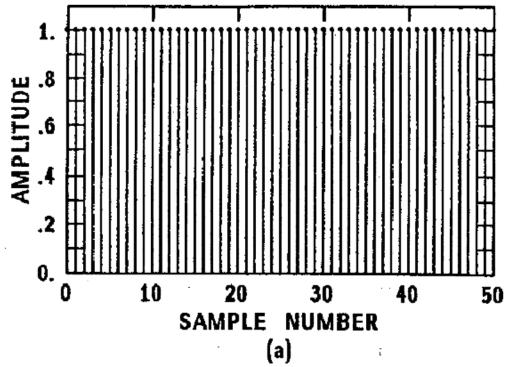
⬍

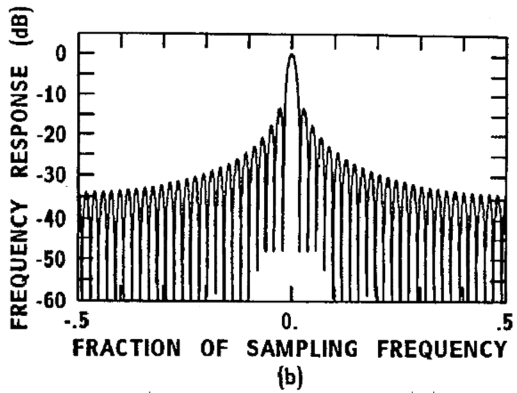
moltiplicare i dati per una finestra rettangolare

⬍

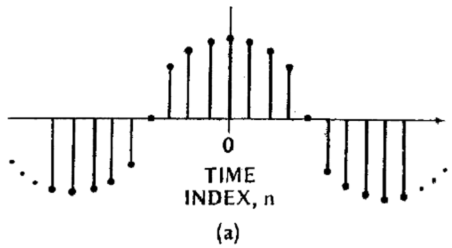
In frequenza, equivale a fare una convoluzione dei due spettri

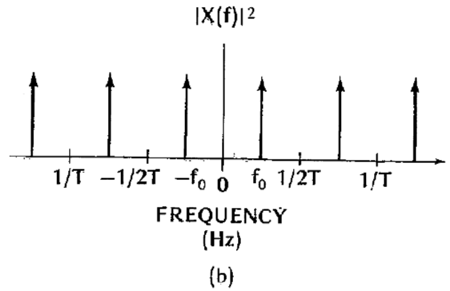
finestra w(n)



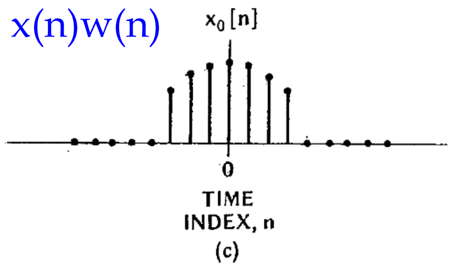


segnale x(n)

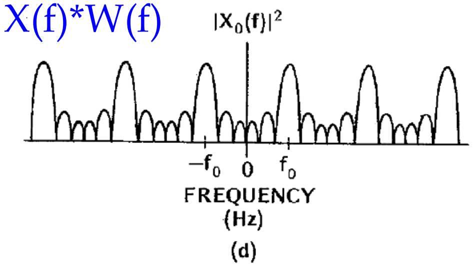




x(n)w(n)



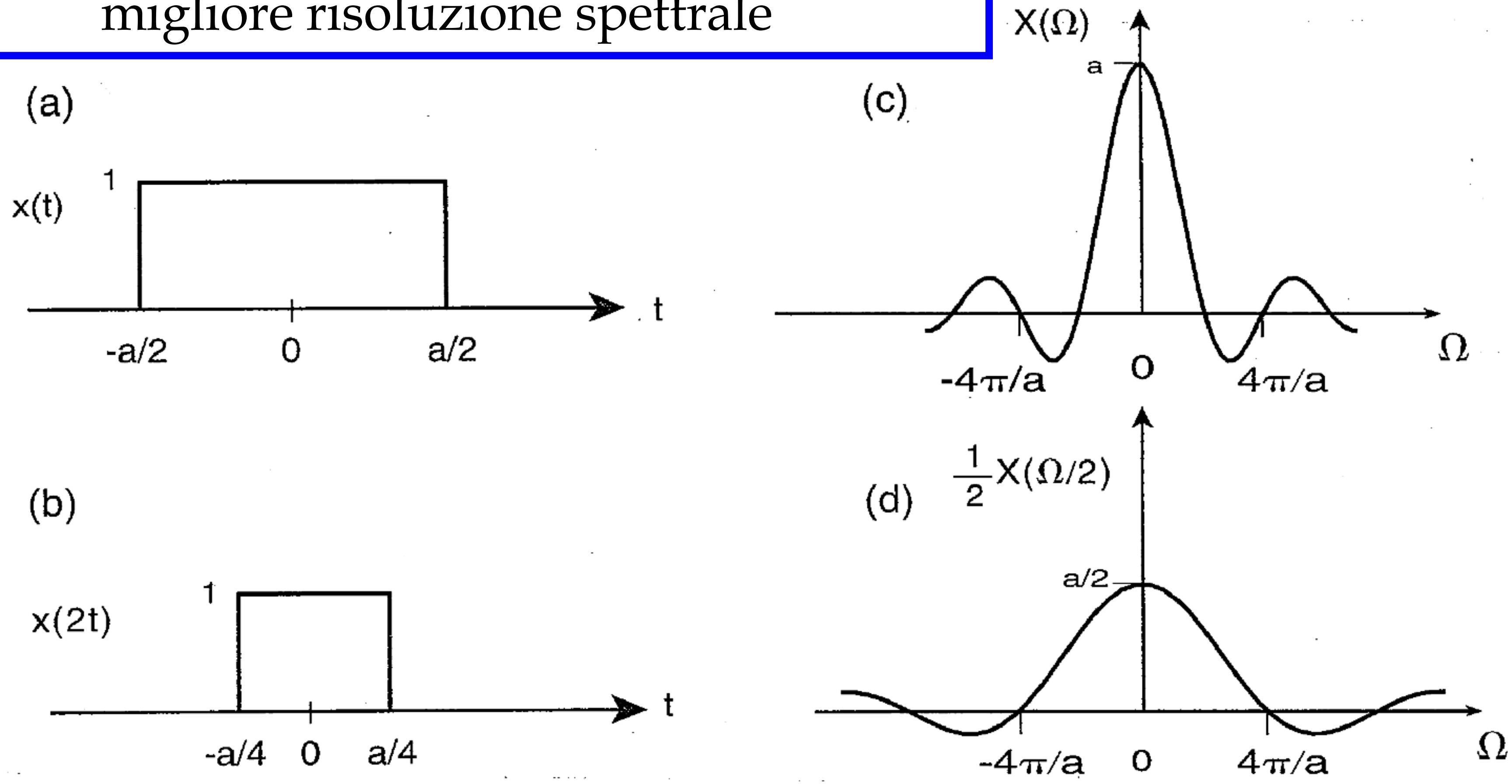
X(f)*W(f)



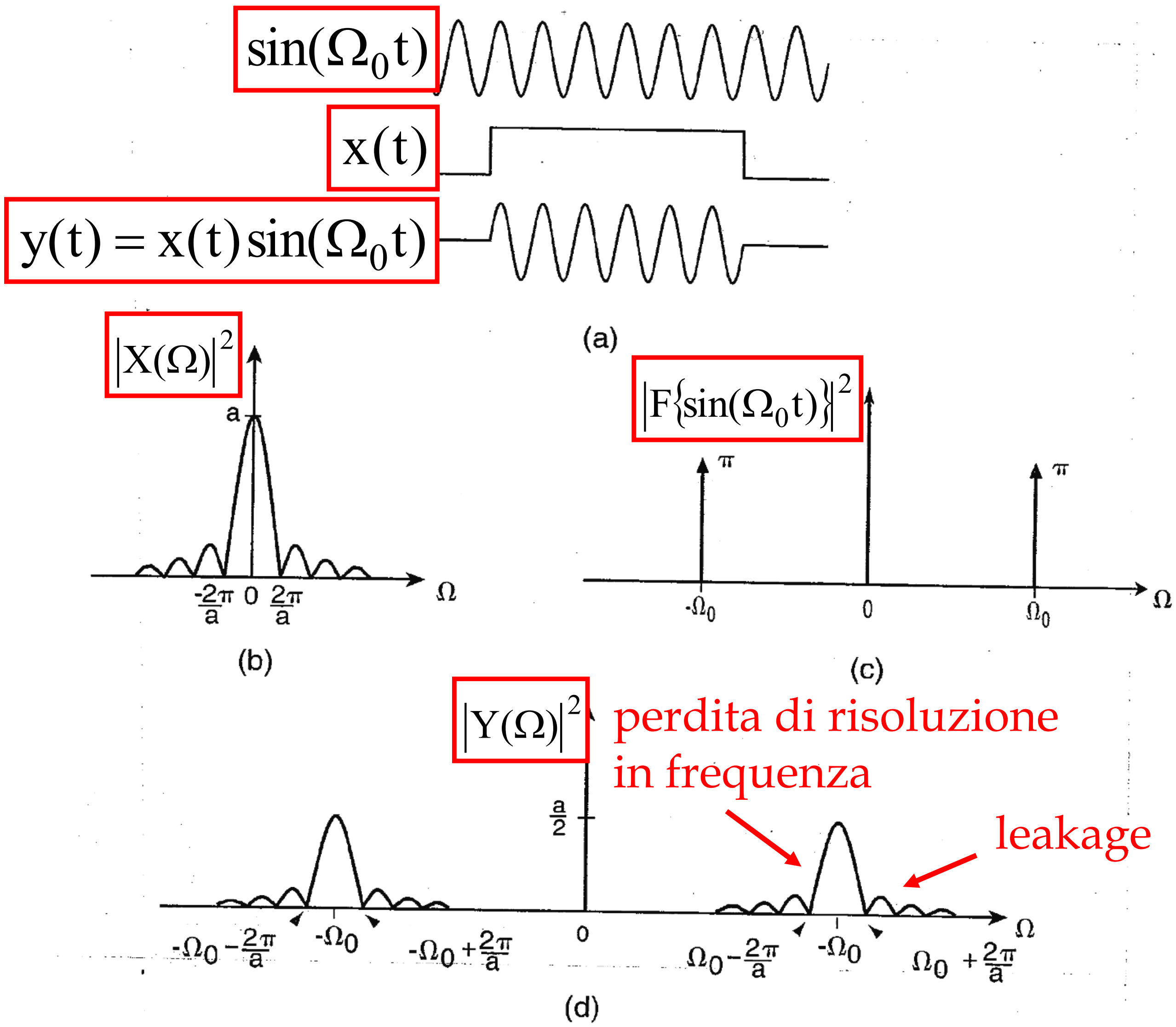
EFFETTO DELLA FINESTRATURA SULLA RISOLUZIONE SPETTRALE

maggior lunghezza della finestra rettangolare

migliore risoluzione spettrale



EFFETTO DELLA FINESTRATURA SULLO SPETTRO



REQUISITI

Una finestratura appropriata può ridurre gli effetti indesiderati dello ***spectral leakage***

tenendo conto della convoluzione dello spettro del segnale per lo spettro della finestra

FINESTRA IDEALE

- lobo principale stretto → per evitare una dispersione locale dello spettro

- lobi laterali con potenza ridotta → per evitare il leakage ad altre frequenze

REQUISITI IN ANTITESI

FINESTRA RETTANGOLARE

FINESTRA RETTANGOLARE

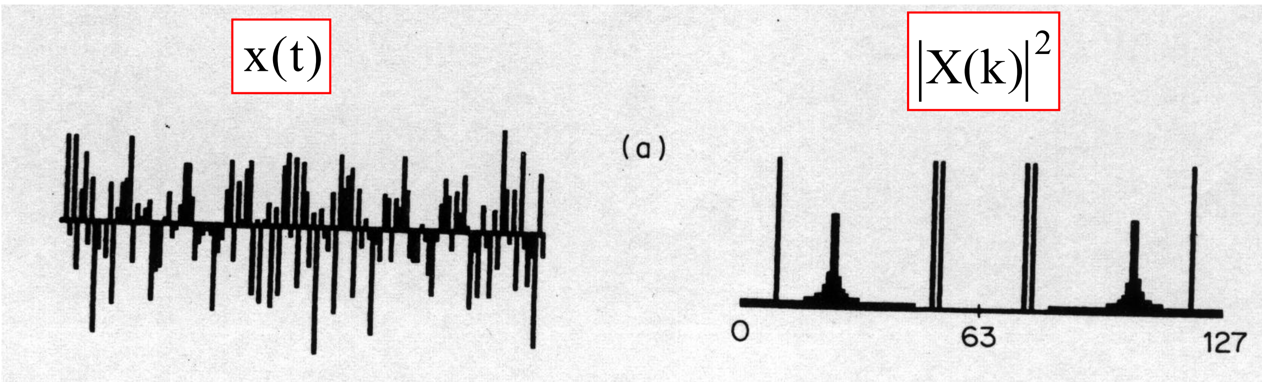
Spettro:

- lobo principale più stretto possibile

- potenza elevata nei lobi laterali (solo -6dB)

No dispersione della potenza delle componenti armoniche esatte

Elevato leakage per le componenti non armoniche



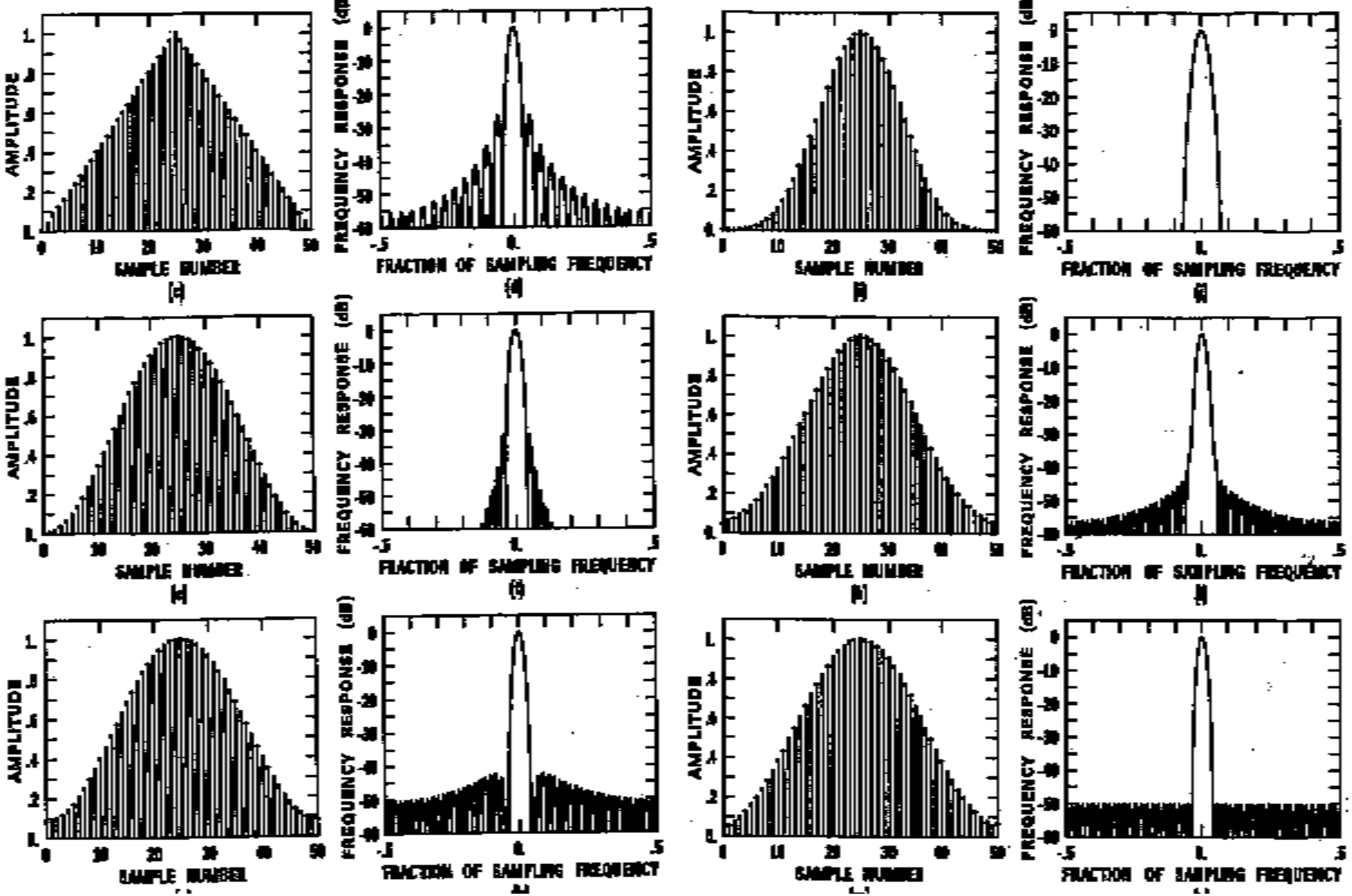
TIPOLOGIE DI FINESRE

dominio del tempo | dominio della frequenza | dominio del tempo | dominio della frequenza

TRIANGOLARE — NUTTAL

HANN — GAUSSIANA

HAMMING — CHEBYSHEV



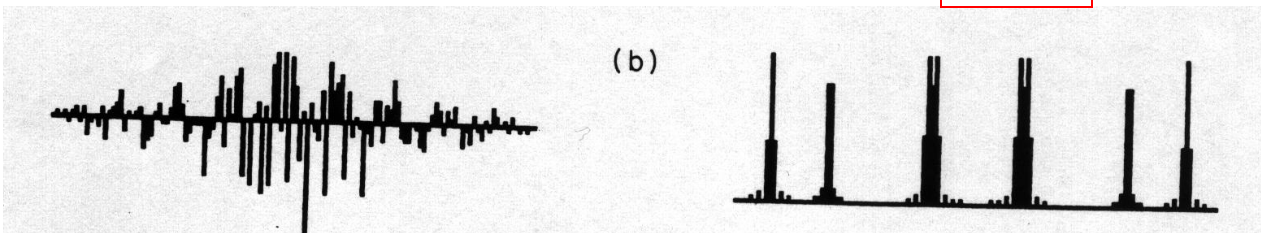
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

ALTRE FINESTRE

FINESTRA TRIANGOLARE

Spettro:
- lobo principale largo
- potenza ridotta nei lobi laterali

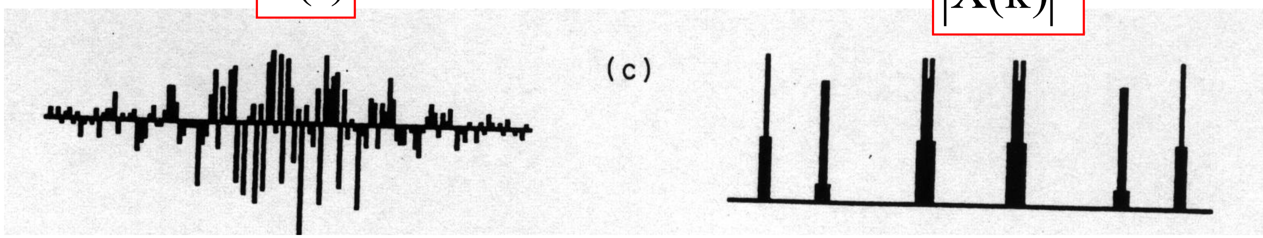
$x(t)$ $|X(k)|^2$



FINESTRA di HAMMING

Spettro:
- lobo principale largo
- potenza ancor più ridotta nei lobi laterali

$x(t)$ $|X(k)|^2$



MODELLI LINEARI

$$w(k) \longrightarrow \boxed{FdT} \longrightarrow y(k)$$

RUMORE BIANCO

SEGNALE DI USCITA

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:

$$A(z)=1 \qquad FdT=C(z) \qquad MA$$

$$C(z)=1 \qquad FdT=\frac{1}{A(z)} \qquad AR$$

$$A(z),C(z)\neq 1 \qquad FdT=\frac{C(z)}{A(z)} \qquad ARMA$$

In generale,

$$y(k) = a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\ldots+a_py(k-p)+w(k)+c_1w(k-1)+c_2w(k-2)+\ldots+c_qw(k-q)$$

Parte autoregressiva di ordine p con coefficienti $a_1, a_2, \ldots, a_p$

Parte moving average di ordine q con coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_q$

TRASFORMATA ZETA

Data la Serie temporale x(n) $0 \le n \le N-1$

Trasformata zeta

$$X(z) = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \ldots + \frac{x(n)}{z^n}$$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}}$$

X(z) funzione della variabile complessa $z = x + jy$

$$\boxed{z^{-1} = operatore \quad di \quad ritardo \quad unitario}$$

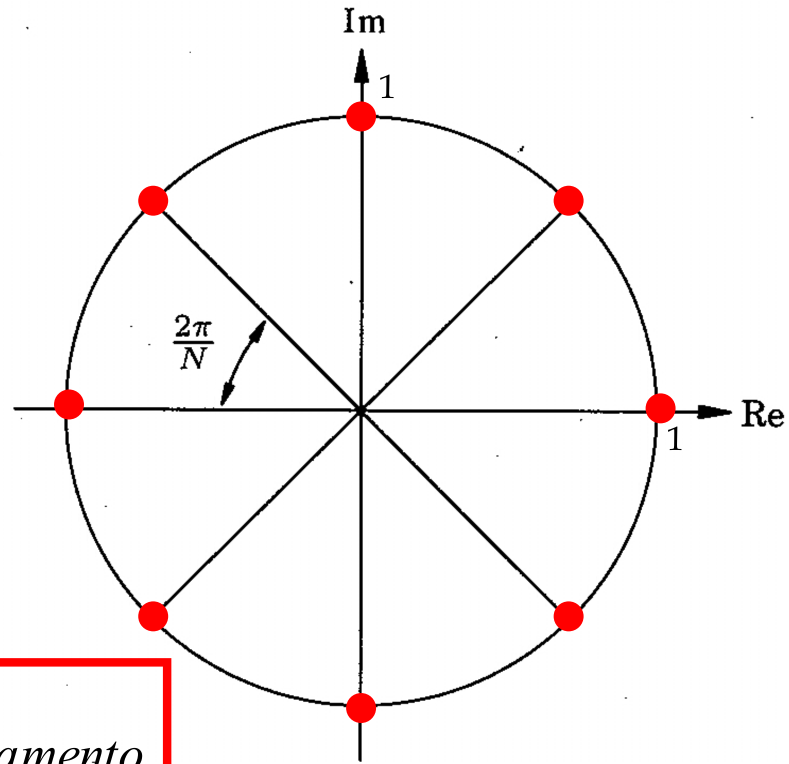
RELAZIONE TRASFORMATA Z-DFT

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Data x(n) ➡ $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

➡ $$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$z = x + jy = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$



La DFT X(k) è la Trasformata Zeta X(z) valutata in N punti equispaziati sul cerchio di raggio unitario

$z^{-1} \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ *ritardo di un periodo di campionamento*

METODO PARAMETRICO

- Nato per svincolarsi dalle ipotesi di Fourier
- Stima lo spettro a partire da un **modello di generazione del segnale** (di solito un modello lineare)
- È necessario stimare i **parametri del modello** (metodo parametrico)

METODI DI IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI

- Solitamente viene scelto un modello AR
- Deve essere definito a priori l'ordine p del modello --| è noto il numero di coefficienti da stimare a_k
- Metodi di identificazione → basati sulla minimizzazione dell'errore di predizione
  - Metodo dei MINIMI QUADRATI
  - Metodo dei MINIMI QUADRATI GENERALIZZATI
  - Metodo di MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

STIMA DELLO SPETTRO

- Approccio deterministico → applico il metodo del periodogramma al segnale ottenuto dal modello
- Approccio stocastico → sfrutta le proprietà del modello

$$w(k) \longrightarrow \boxed{\mathrm{FdT}} \longrightarrow y(k)$$

$$Pw(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Py(z)$$

La funzione di trasferimento del sistema equivale alla trasformata zeta della risposta all'impulso

$$Py(z) = \underbrace{H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}_{|H(z)|^2}\mathrm{Pw}(z)$$

Costante = $\sigma_N^2 \Delta t$

$$Py_{AR} = \frac{\sigma_N^2 \Delta t}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j2\pi f_m k \Delta t}\right|^2}$$

VANTAGGI E SVANTAGGI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

	VANTAGGI	SVANTAGGI
NON PARAMETRICO	• Non serve avere conoscenza a priori del segnale per definire il modello • Facile implementazione grazie alla FFT • Stimatori buoni per un grande numero di campioni	• Capacità di risoluzione limitata dal numero di campioni a disposizione • Problema della finestratura
PARAMETRICO	• Alta capacità di risolvere picchi vicini • Non richiede finestratura • Possibilità di decomposizione spettrale	• Scelta dell'ordine • Conoscenza del sitema a priori • Algoritmi computazionalmente onerosi

CROSS-SPETTRO E COERENZA

- Considero due processi stocastici stazionari di cui voglio studiare la correlazione frequenza per frequenza → definisco il CROSS_SPETTRO

- Dati due processi x(i) e y(i) , stocastici, stazionari e ergodici →

cross-spettro = trasformata di Fourier della cross-correlazione

$$C_{xy}(f) = FT[CCF_{xy}(k)]$$

STIMA DIRETTA DEL CROSS SPETTRO

Dati i processi x(n) e y(n)

↓

Divido i segnali in k finestre di M campioni e tolgo la media

↓

Per ogni finestra i-esima, calcolo $P_{x,i}$=DFT(x) e $P_{y,i}$=DFT(y)

↓

In ogni finestra, stimo $C_{xy,i}$ come $P_{x,i}P_{y,i}$

↓

C_{xy} = Media dei $C_{xy,i}$ ottenuti sui diversi spezzoni

COERENZA

- Poichè il cross-spettro dipende dal prodotto degli autospettri → se in un certo autospettro la potenza di un'oscillazione in comune tra i due segnali è molto elevata, il cross-spettro risulterà molto alto

- Mi serve una misura "normalizzata"

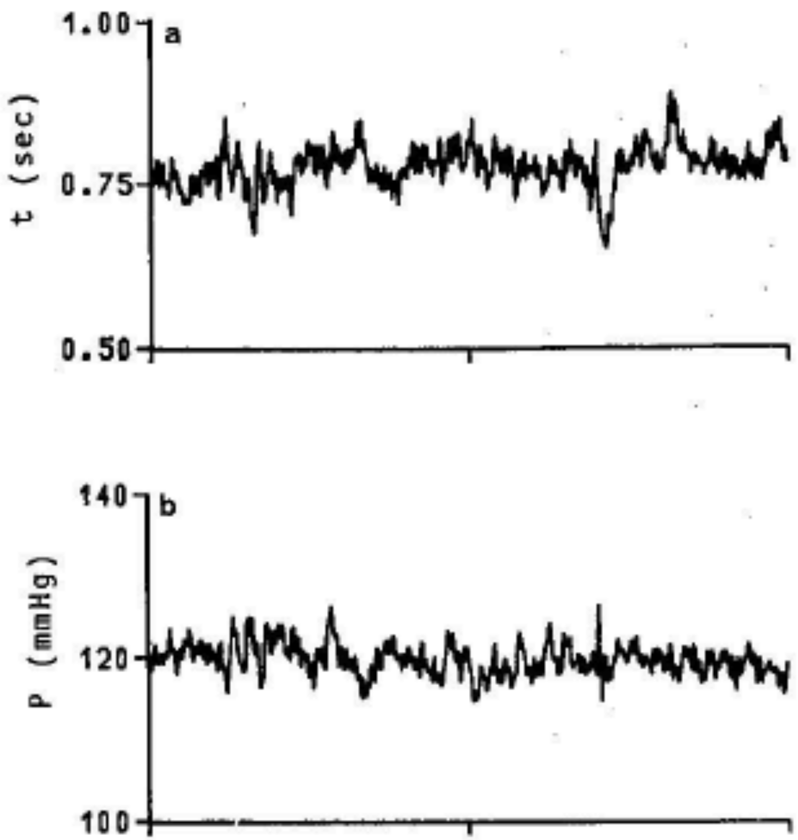
- COERENZA → cross-spettro normalizzato per il prodotto degli autospettri

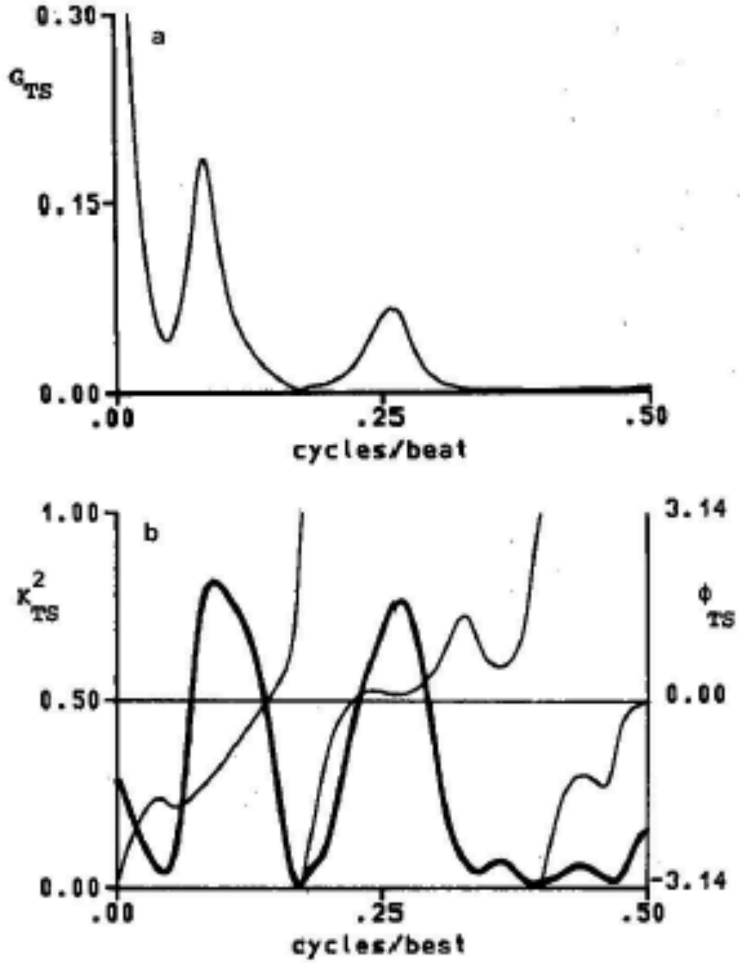
$$K_{xy}(f) = \frac{C_{xy}(f)C_{xy}^{*}(\mathrm{f})}{P_x(f)P_y(f)}$$

- Poichè il cross-spettro si ottiene dal prodotto degli autospettri, la coerenza è una costante compresa tra [0,1] → indice

ESEMPIO

x(n)= tacogramma (distanza tra due battiti cardiaci consecutivi)
y(n)=pressione sistolica

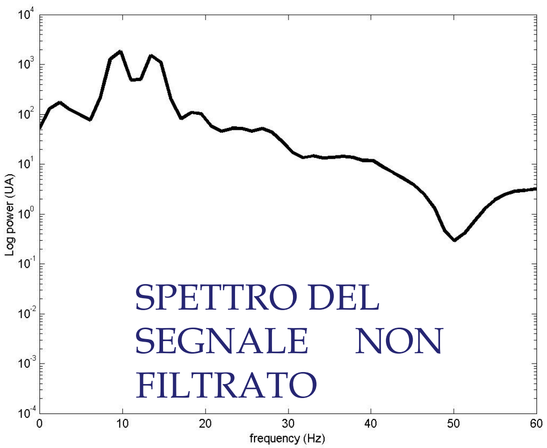




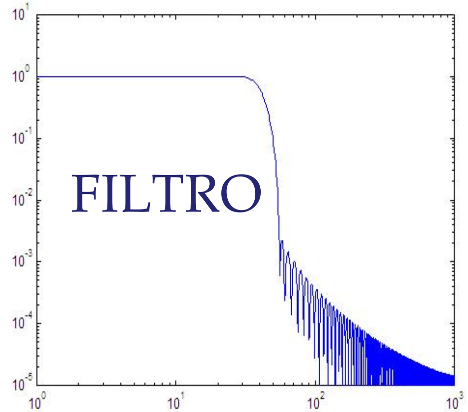
FILTRAGGIO DEL SEGNALE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

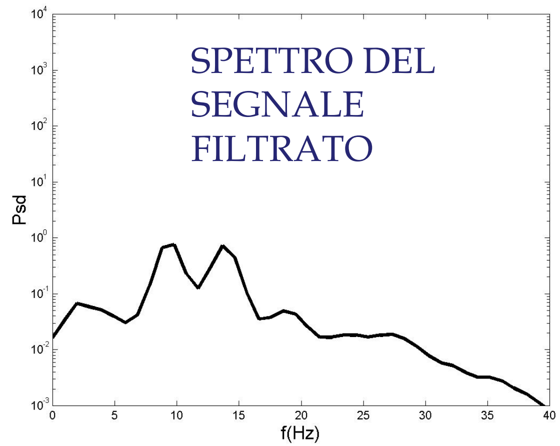
Dato un segnale contenente informazione e rumore, voglio ridurre la componente di rumore per esaltare l'informazione utile



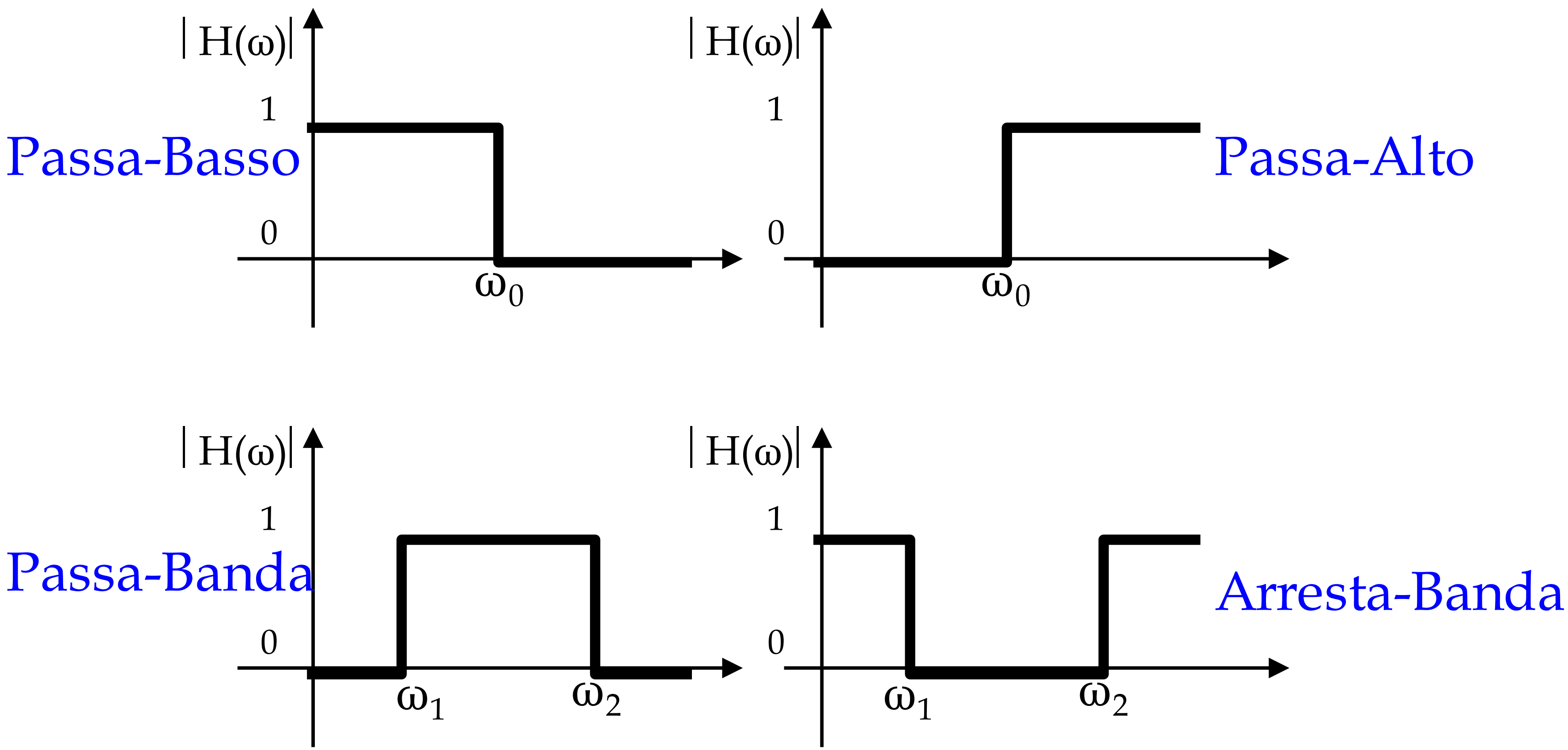
*



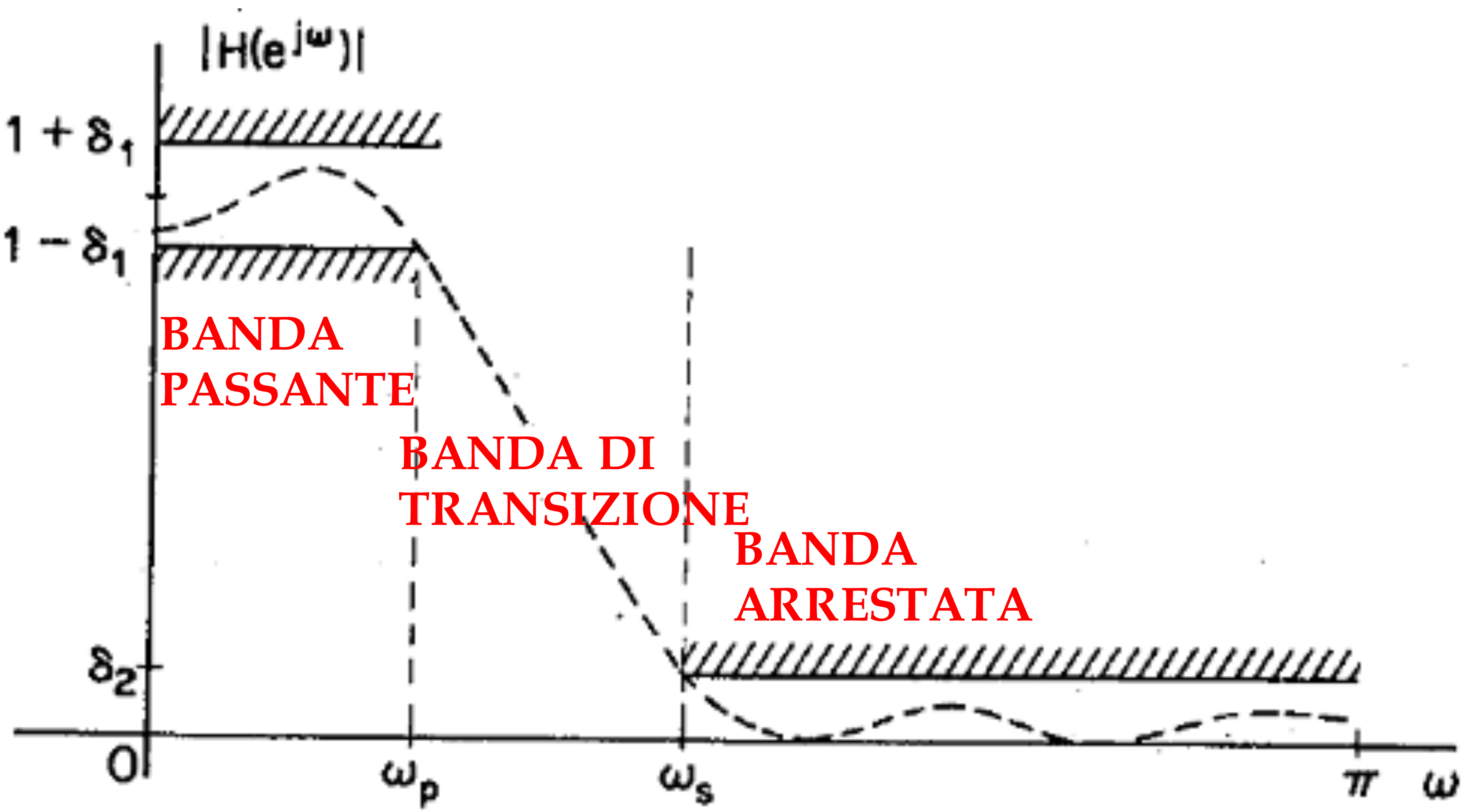
=



FILTRI IDEALI



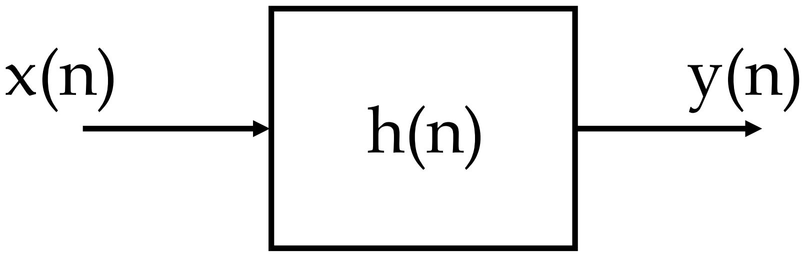
FILTRI REALI



FILTRI NUMERICI

Trasforma la serie numerica in ingresso x(n) in una nuova serie numerica y(n)

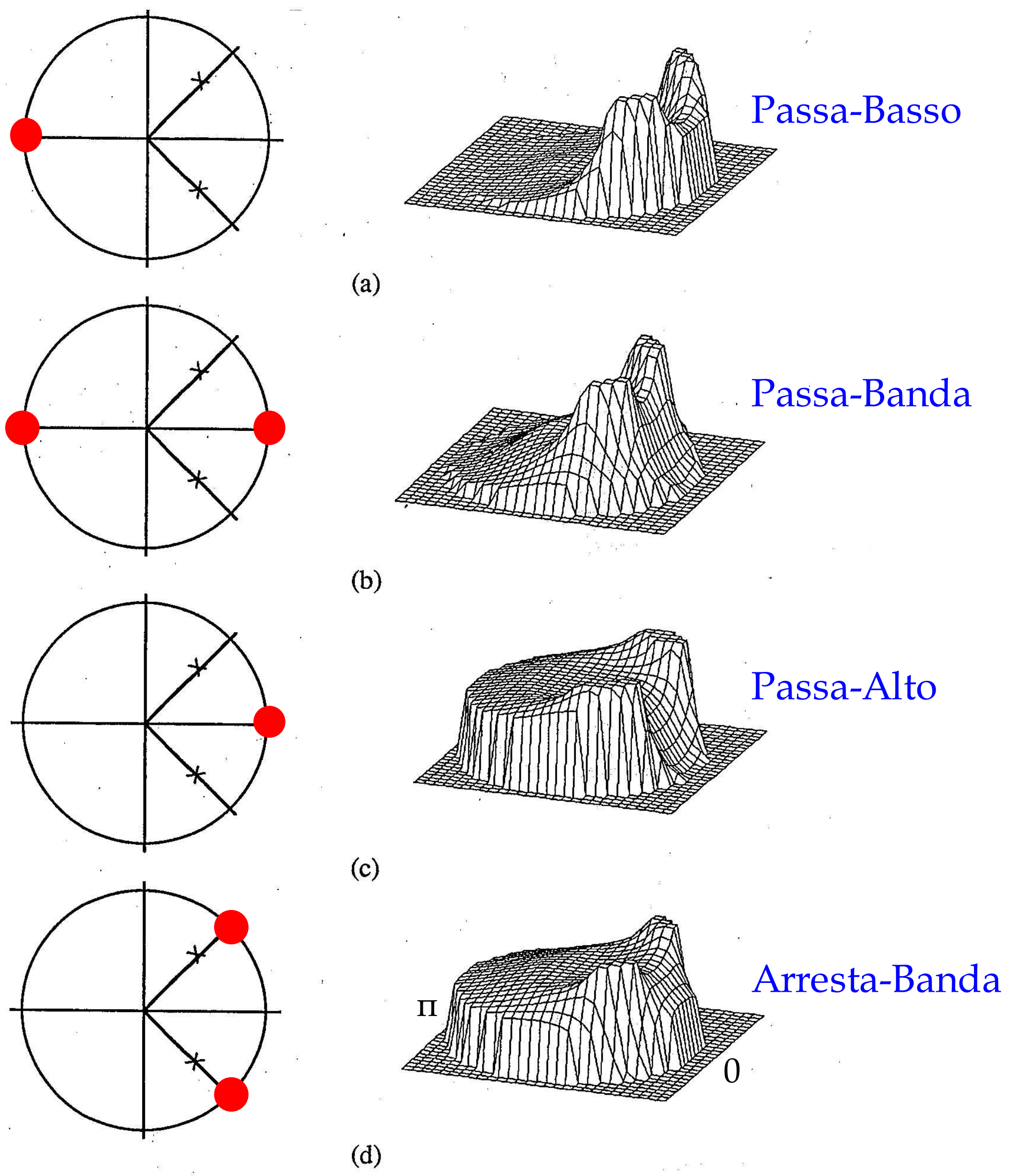
segnale campionato e quantizzato



- Il filtro trasforma x(n) in y(n) modificandone il contenuto in frequenza
- Il filtro rappresenta la risposta all'impulso di questo sistema h(n)
- Nei sistemi lineari, vale l'equazione alle differenze

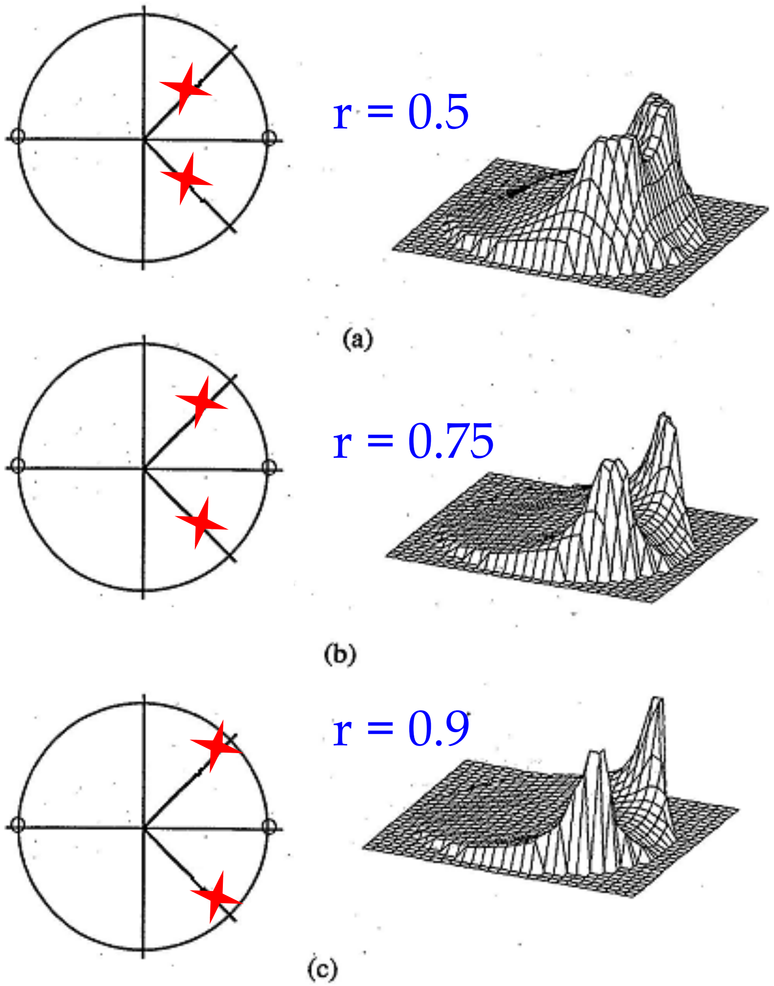
$$y(k) = a_1 y(k-1)+a_2 y(k-2)+ \ldots +a_p y(k-p)+w(k)+c_1 w(k-1)+c_2 w(k-2)+ \ldots +c_q w(k-q)$$

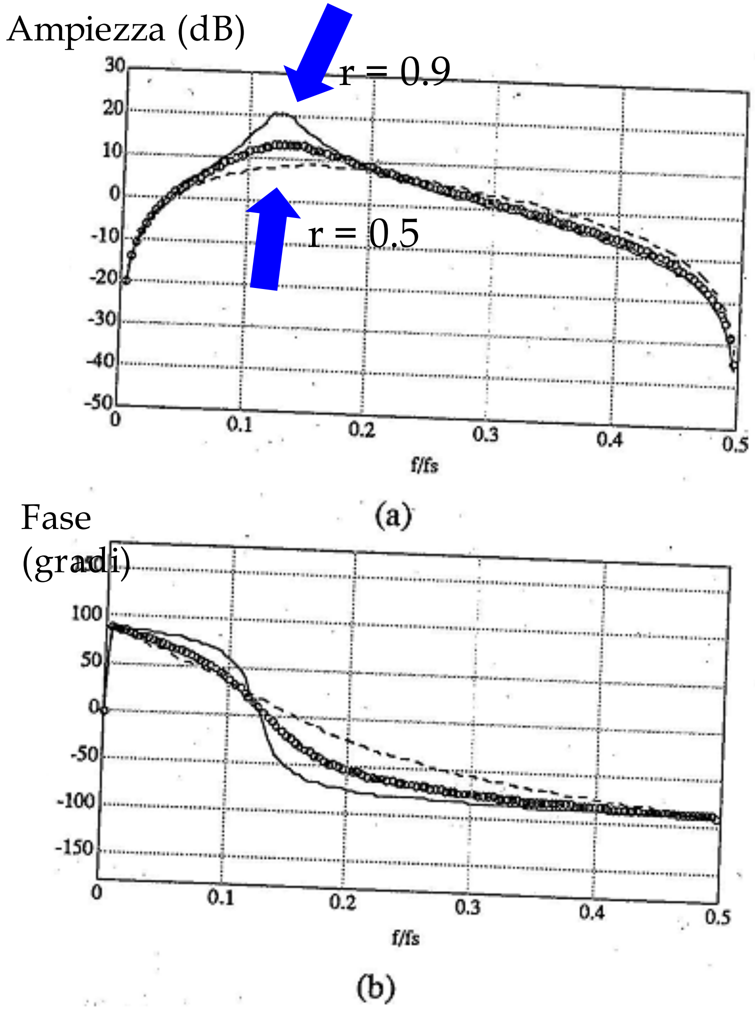
EFFETTO DEGLI ZERI



La posizione degli zeri modifica la caratteristica del filtro → la risposta in frequenza è 0 nell'intorno degli zeri

EFFETTO DEI POLI





La posizione dei poli modifica la selettività del filtro → i poli che si avvicinano al cerchio di raggio unitario fanno aumentare la risposta in frequenza in un intorno più selettivo, ma la fase perde linearità

TIPOLOGIE DI FILTRI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

FILTRI → RICORSIVI / NON RICORSIVI

RICORSIVI

- y(n) dipende anche da y(n-k)
- I coefficienti a_i dell'equazione alle differenze sono diversi da 0

NON RICORSIVI

- y(n) dipende solo da u(i)
- I coefficienti a_i dell'equazione alle differenze sono = 0

FILTRI → IIR / FIR

IIR

- Infinite Impulse Response
- Solitamenrte ricorsivi

FIR

- Finite Impulse Response
- Solitamente sono non ricorsivi

FILTRI FIR

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Nel dominio del tempo:

$$y(n) + a_1 \cancel{y(n-1)} + \ldots + a_N \cancel{y(n-N)} = b_0 x(n) + \ldots + b_M x(n-M)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x(n-k)}$$

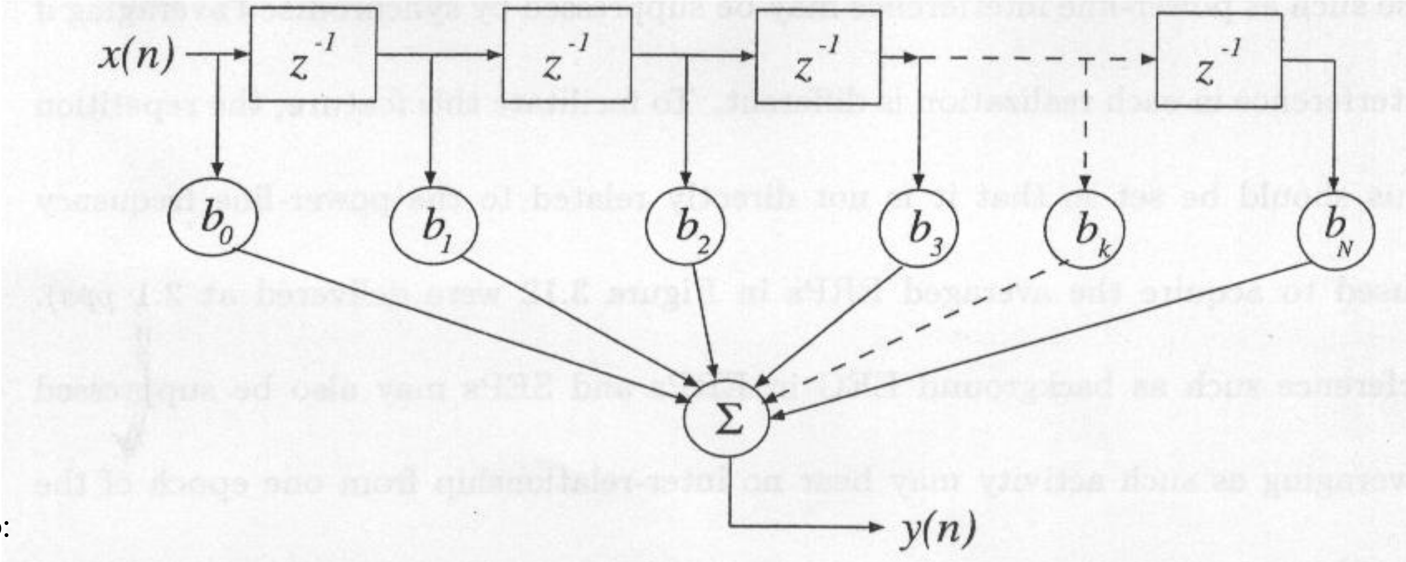
Filtraggio a media mobile (MA)

Trasformata Z:

$$Y(z) = (b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots + b_M \cdot z^{-M}) \cdot X(z) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}$$

- ✓ filtro FIR → numero finito di termini della risposta all'impulso
- ✓ poli solo nell'origine → filtro stabile
- ✓ fase lineare (a tratti)

ESEMPIO: FILTRAGGIO A MEDIA MOBILE



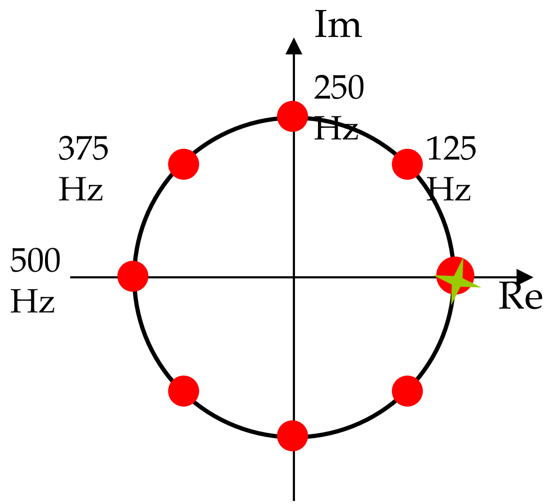
Esempio:

$$y(n)=\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=0}^{7}x(n-k)$$

$$H(z)=\frac{1}{8}\cdot\sum_{k=0}^{7}z^{-k}$$

Media mobile a 8 campioni

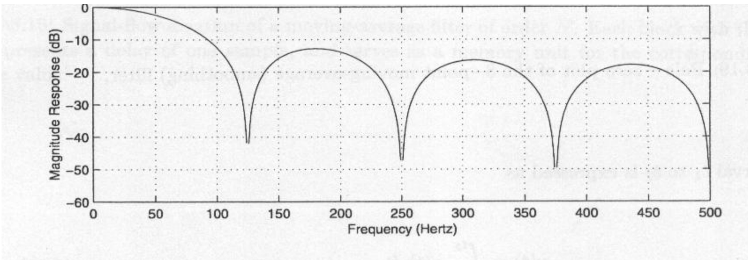
$$H(z)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1-z^{-8}}{1-z^{-1}}$$

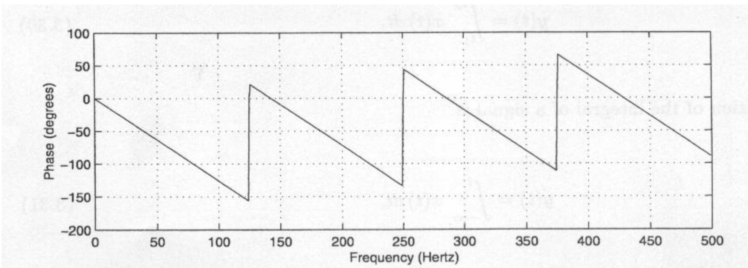


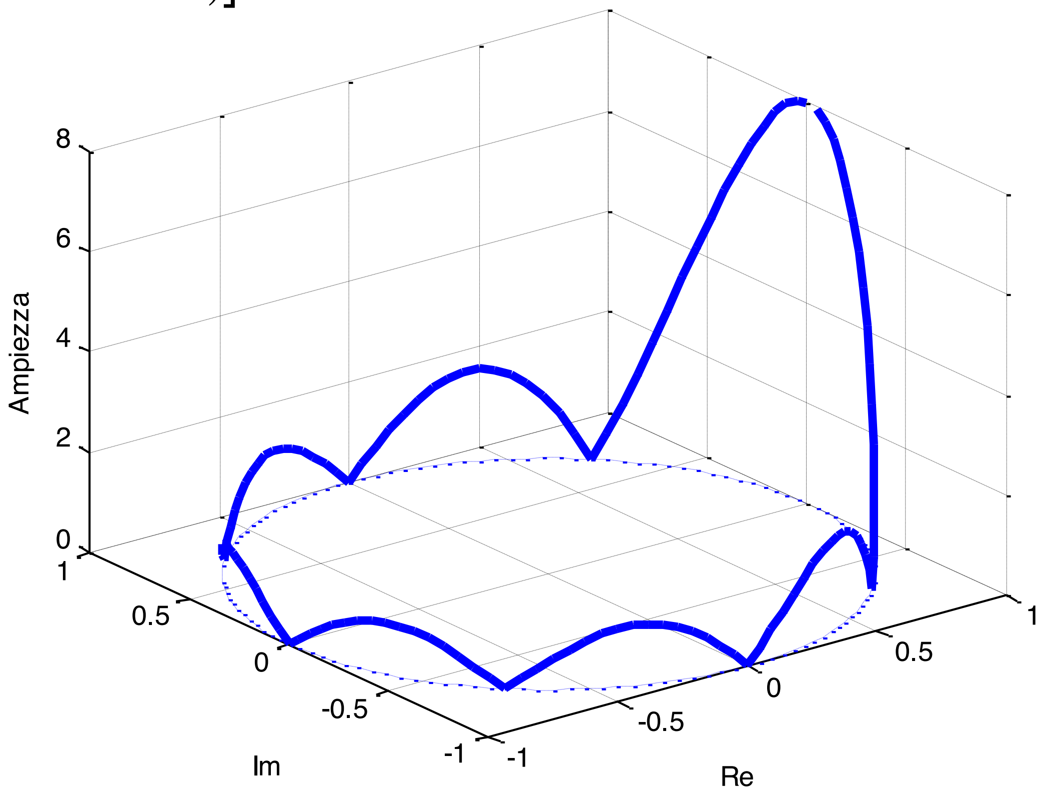
FILTRAGGIO A MEDIA MOBILE

Risposta in frequenza:

$$H(\omega) = \frac{1}{8} \cdot \left[1 + e^{-j4\omega} \cdot \left(1 + 2\cos\omega + 2\cos 2\omega + 2\cos 3\omega\right)\right]$$



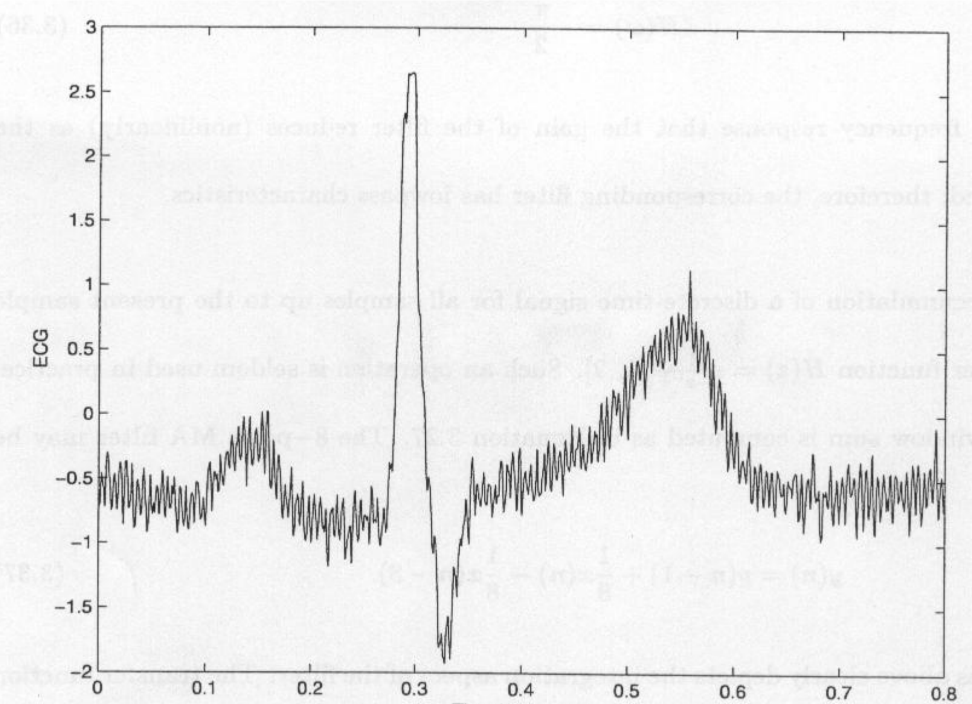




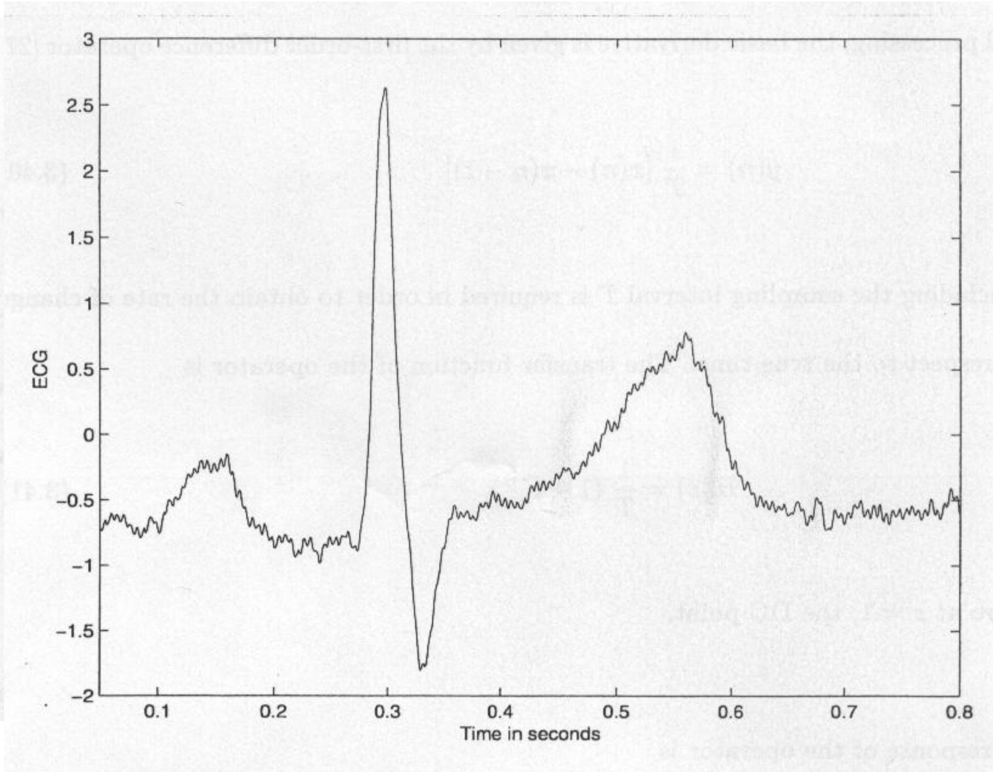
Al crescere di N, la frequenza di taglio diminuisce, filtrando maggiormente le componenti in alta frequenza

FILTRAGGIO A MEDIA MOBILE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE



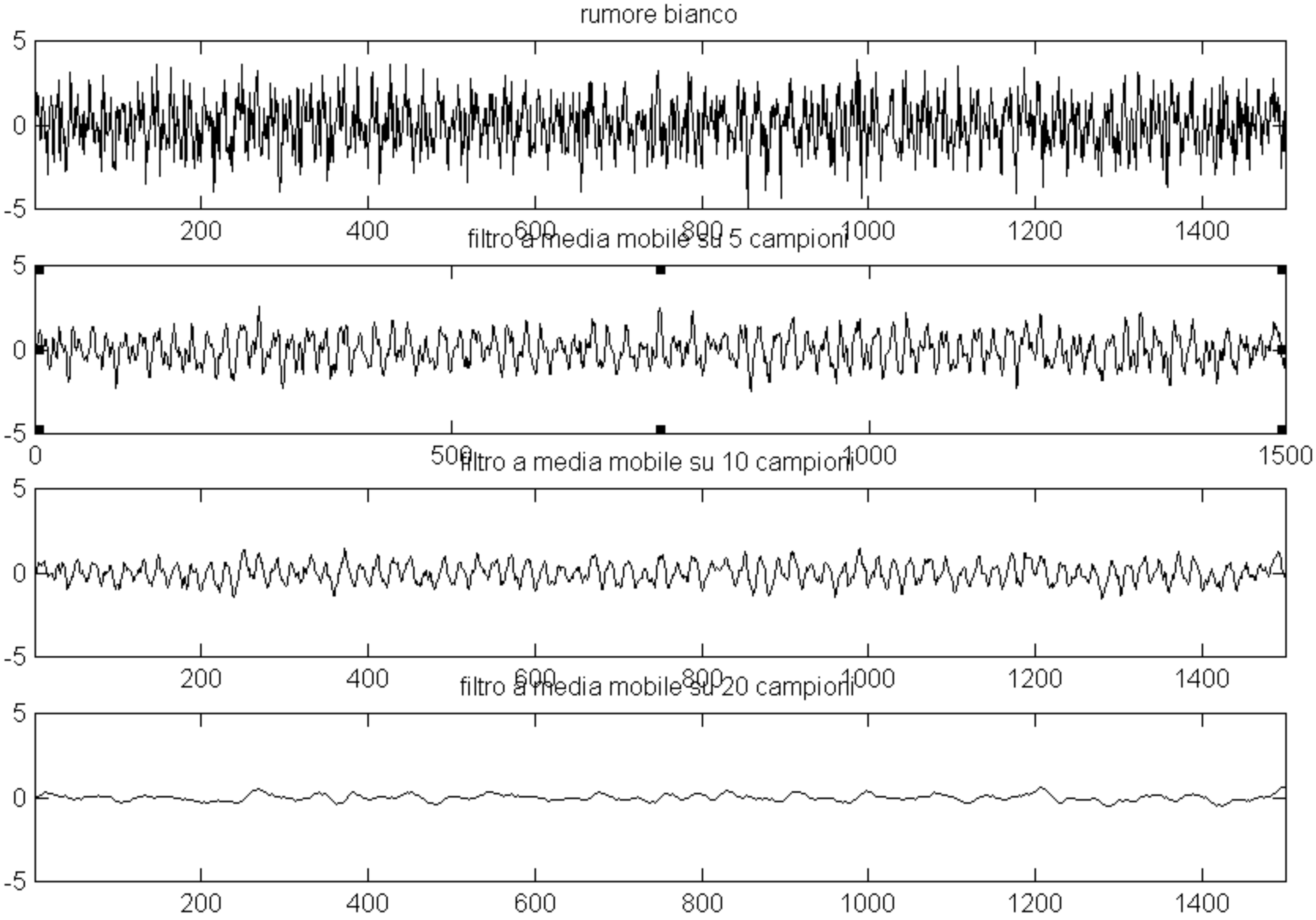
ECG con rumore in alta frequenza; f_c = 1000 Hz



Si osserva del rumore residuo, legato al fatto che tale filtro taglia di circa 20 dB, a parte dove si hanno gli zeri

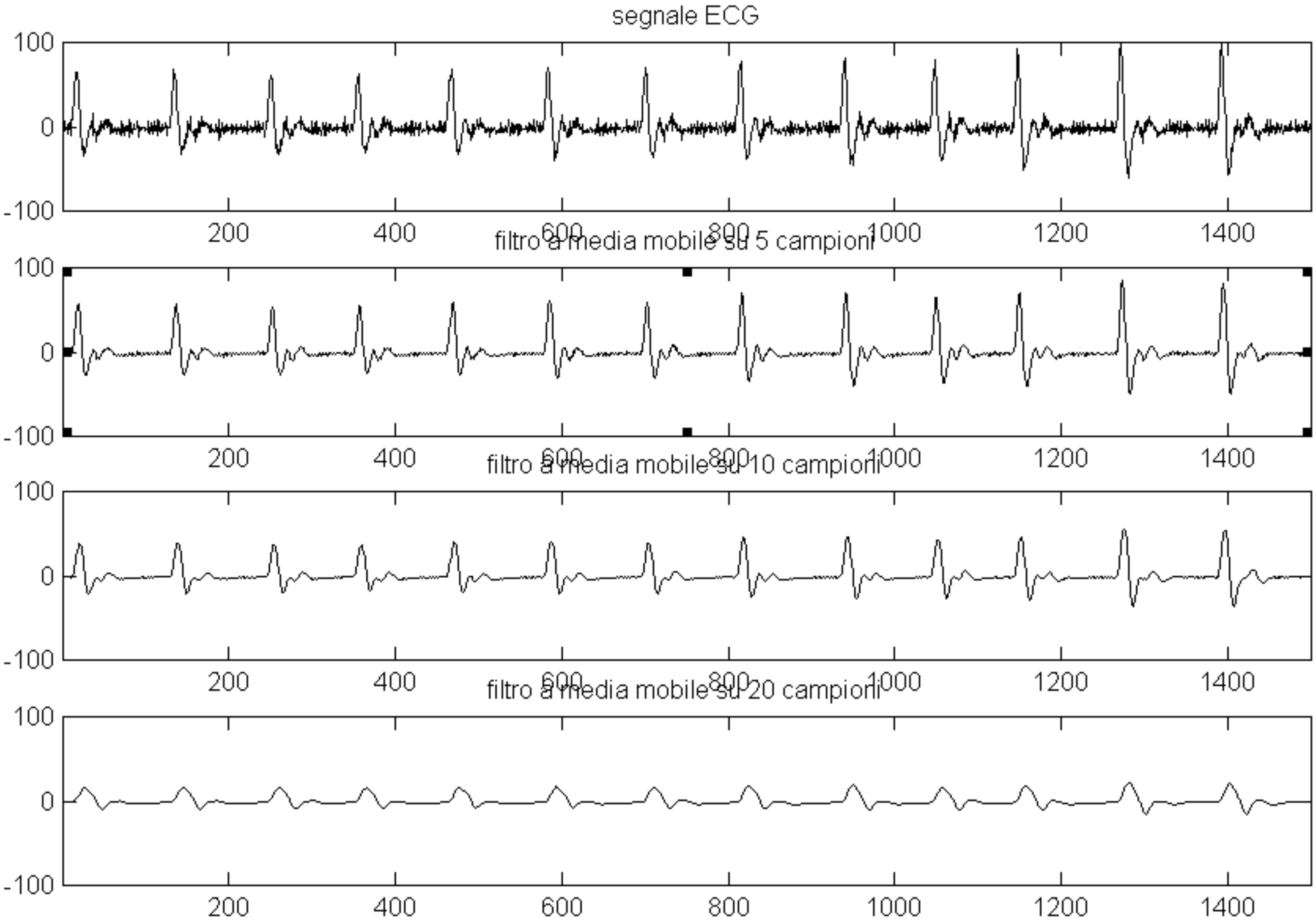
ESEMPIO: FILTRO MA SU RUMORE BIANCO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

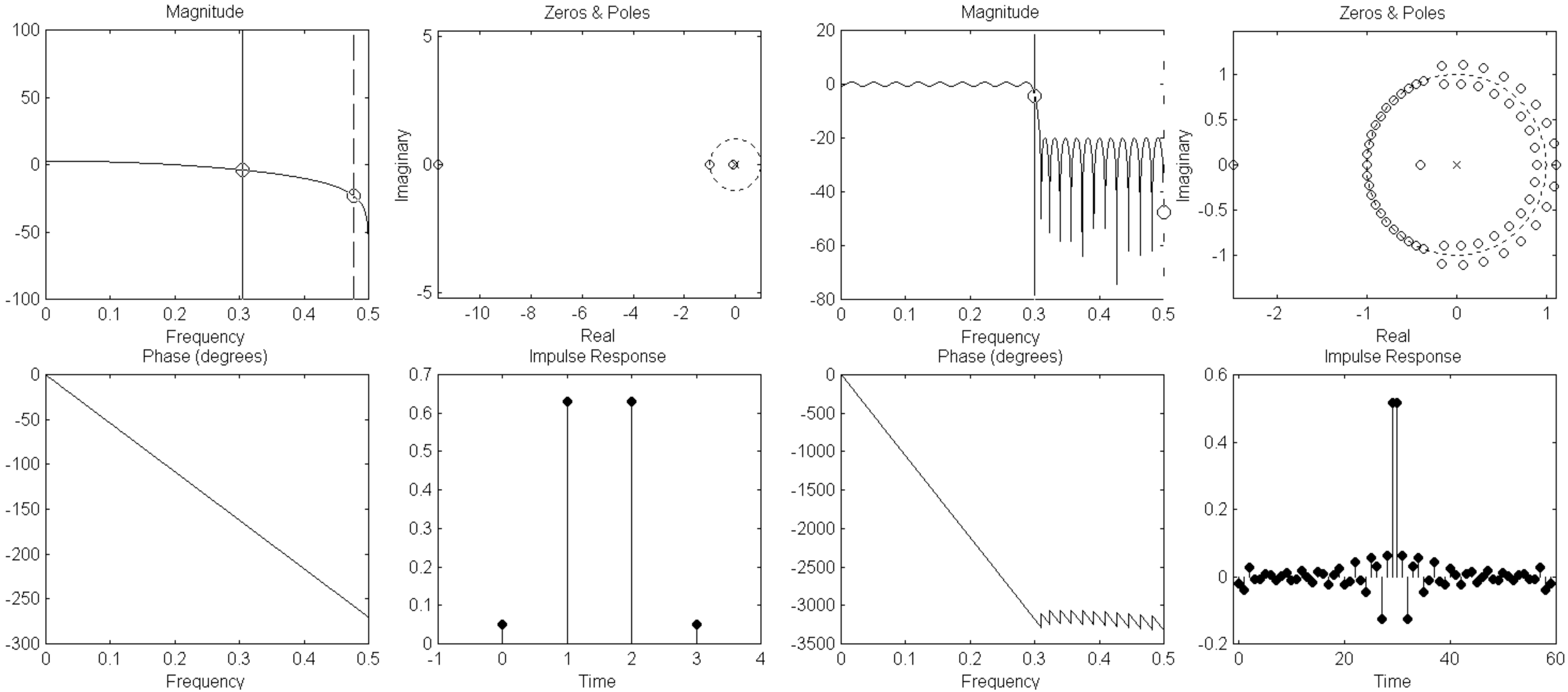


ESEMPIO: FILTRO MA SU SEGNALE ECG

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

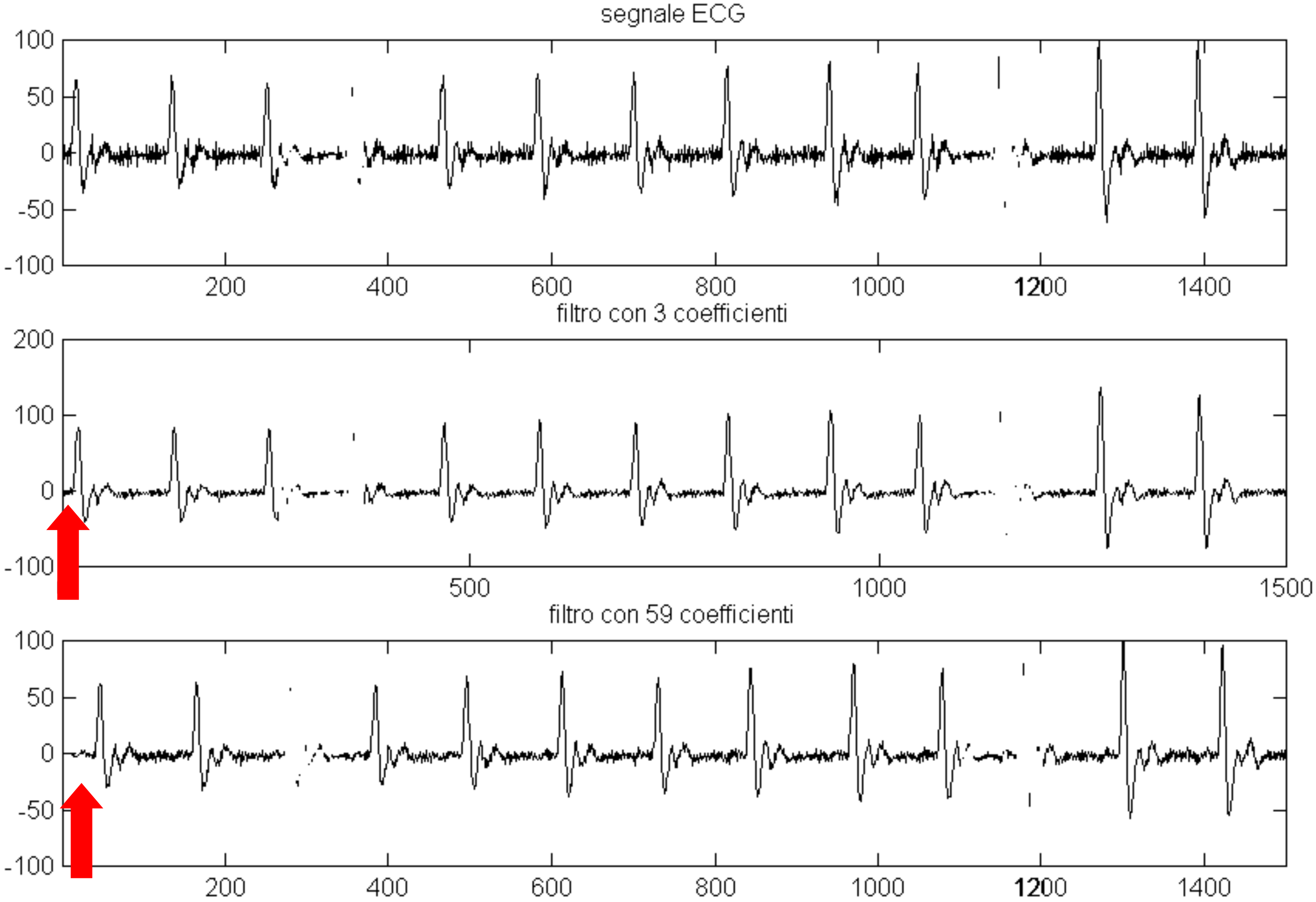


EFFETTO DELL'AUMENTO DELL'ORDINE



Con l'aumento dell'ordine, aumentano gli zeri e aumenta il numero di campioni su cui mediare → il filtro avrà bisogno di un numero maggiore di campioni per dare un'uscita a regime

ESEMPIO

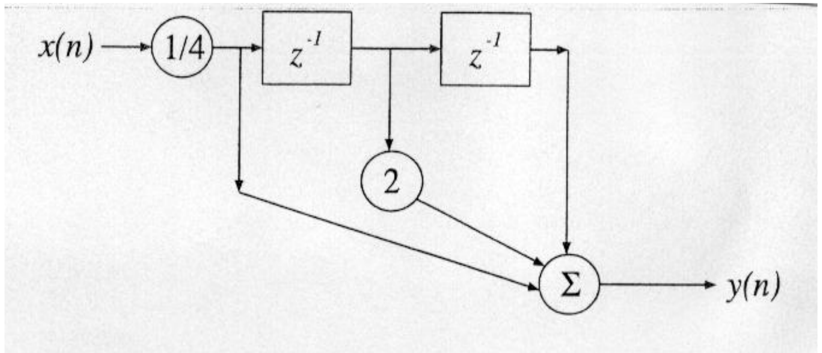


segnale ECG
100
50
0
-50
-100
200
400
600
800
1000
1200
1400
filtro con 3 coefficienti
200
100
0
-100
500
1000
1500
filtro con 59 coefficienti
100
50
0
-50
-100
200
400
600
800
1000
1200
1400

FILTRO DI HANNING

$$y(n) = \frac{1}{4} \cdot \left[x(n) + 2 \cdot x(n-1) + x(n-2) \right]$$

$$H(z) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}) \; = \frac{1}{4} \cdot \frac{(z+1)^2}{z^2}$$



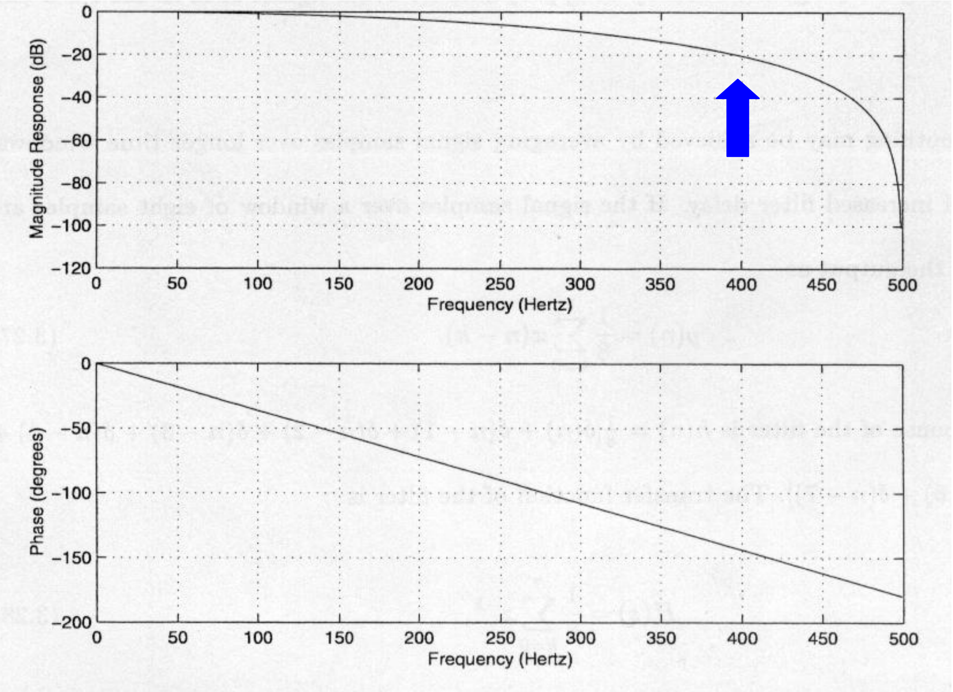
Risposta in frequenza:

$$H(\omega) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 \cdot e^{-j\omega} + e^{-j2\omega})$$

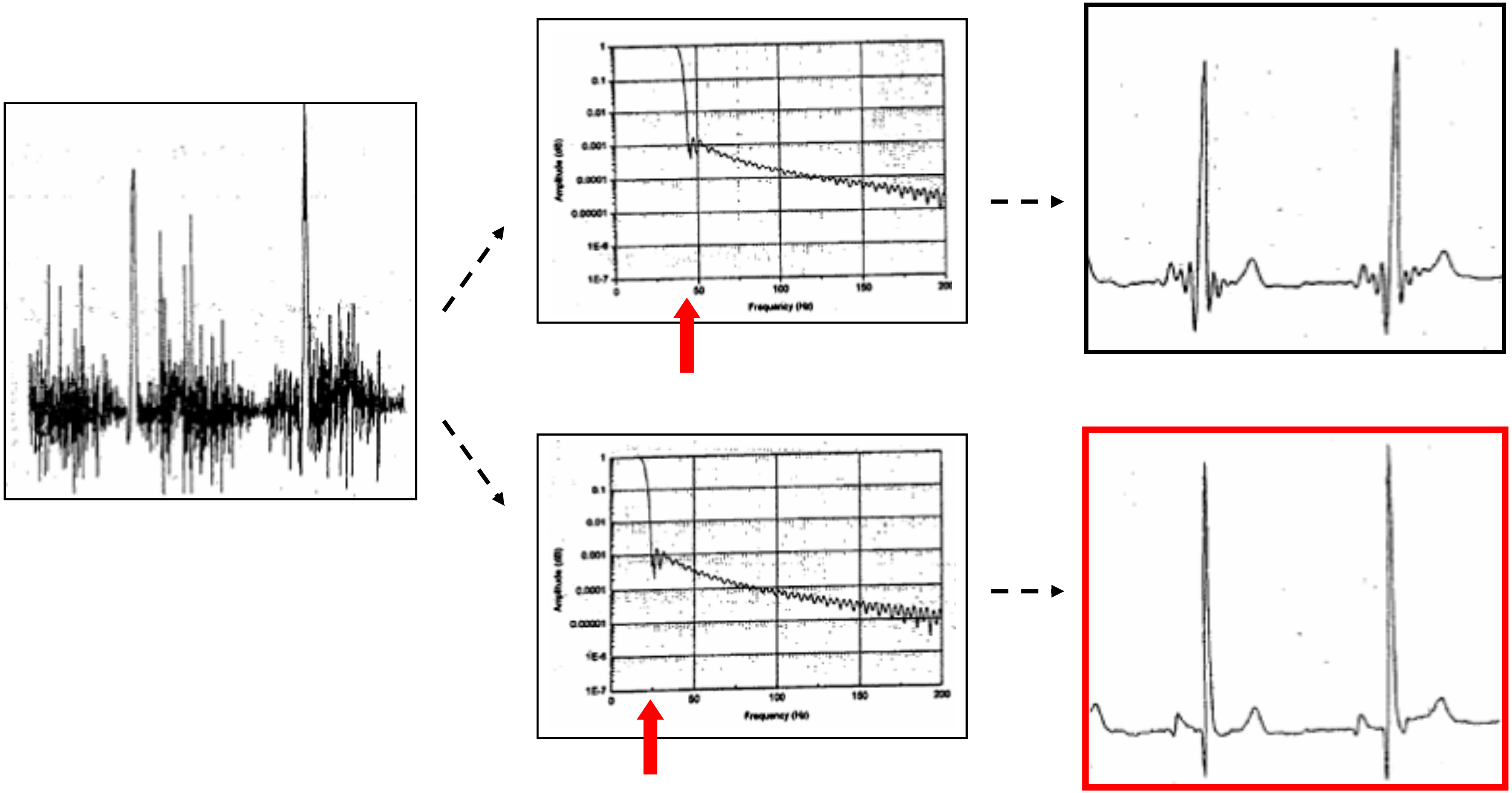
$$= \frac{1}{4} \cdot \left[(2 + 2\cos\omega) \cdot e^{-j\omega} \right]$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{2} \cdot |1 + \cos\omega|$$

$$faseH(\omega) = -\omega$$

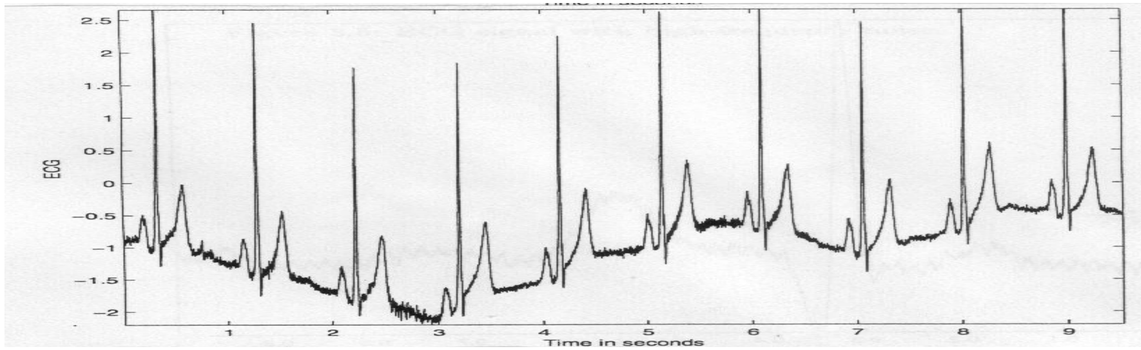


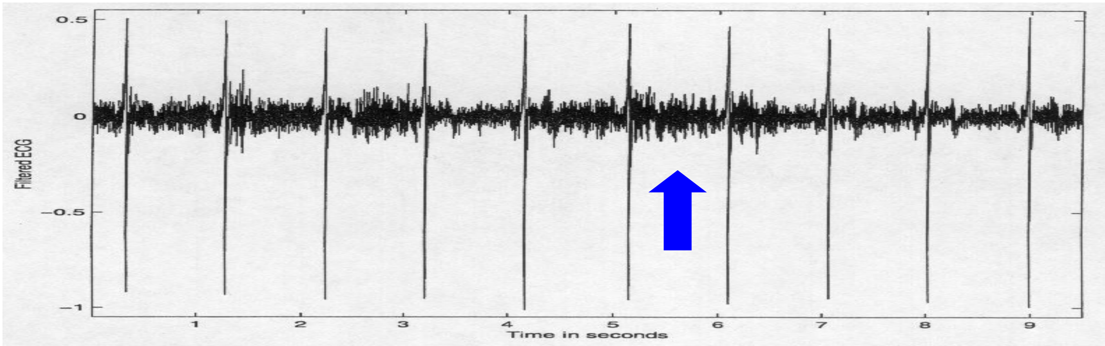
FREQUENZA DI TAGLIO E RIDUZIONE DEL RUMORE



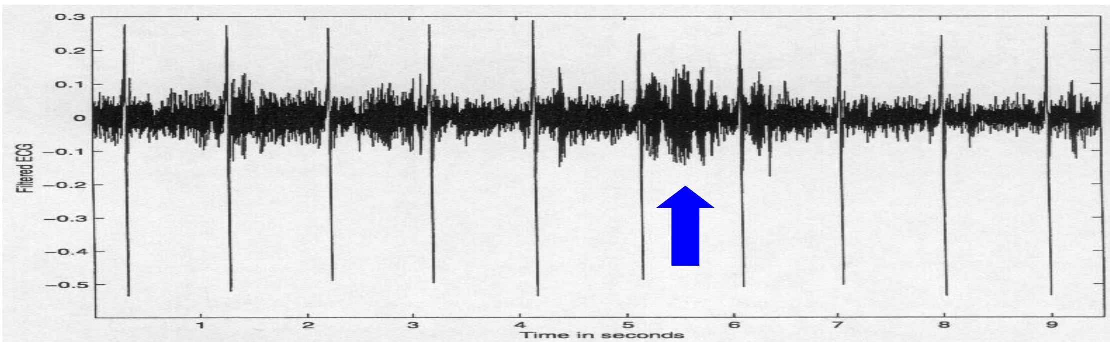
FILTRO DERIVATORE PER LA RIMOZIONE DELLA LINEA DI BASE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



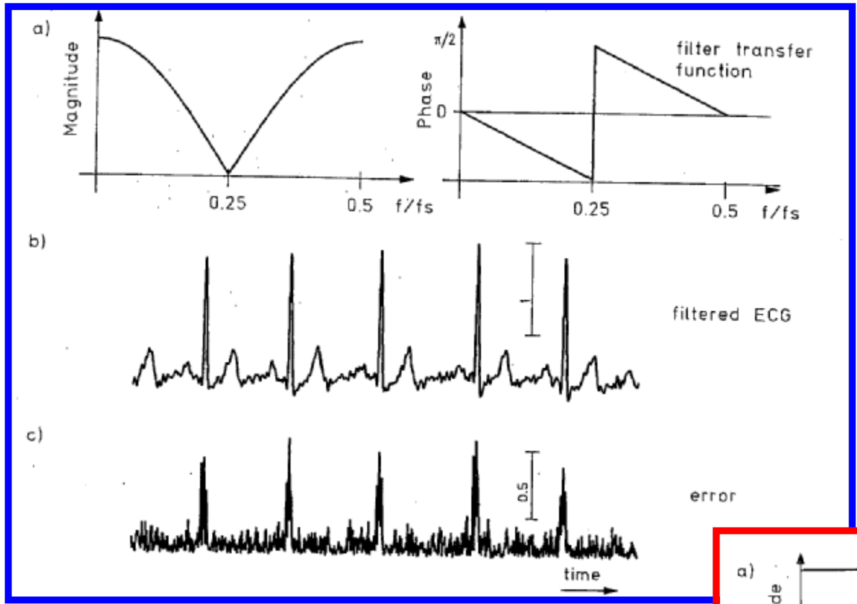


3° ordine

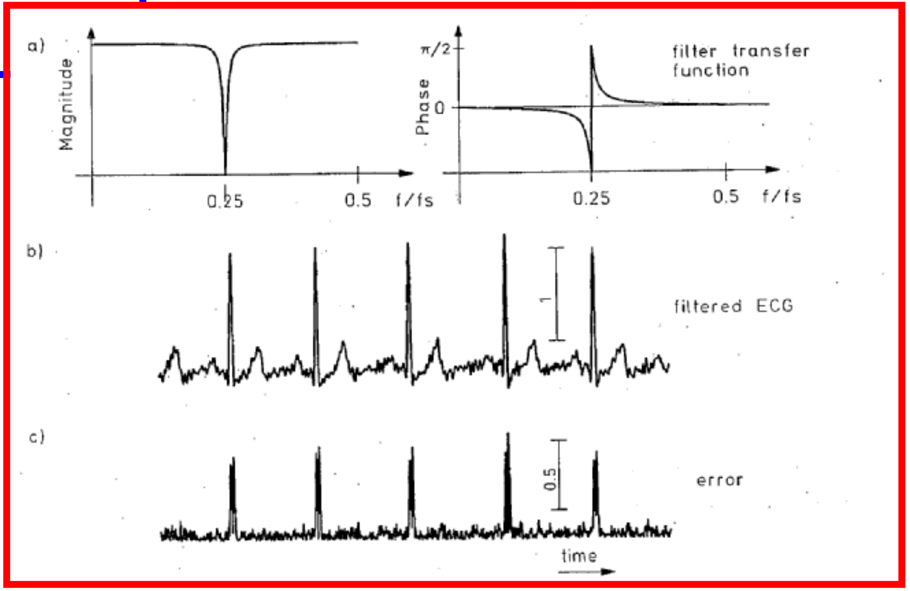


1° ordine

FILTRI NOTCH



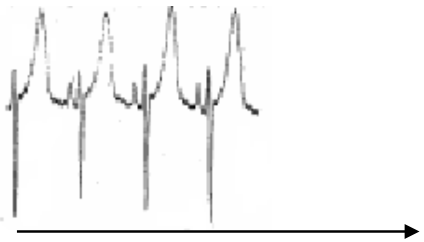
FIR



IIR

LINEARITÀ DELLA FASE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



Tempo

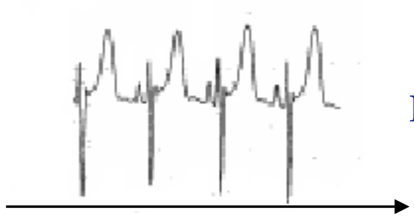
Segnale originale

Fase lineare = 0

π

0

$-\pi$



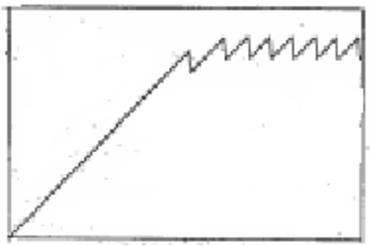
Tempo (s)

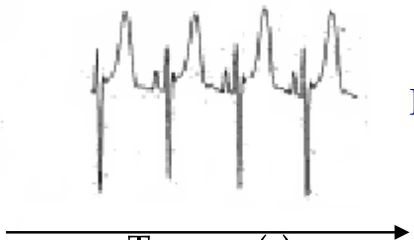
No distorsione

Fase lineare a tratti

10π

0





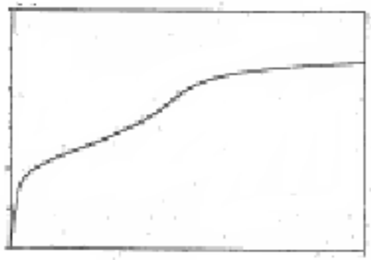
Tempo (s)

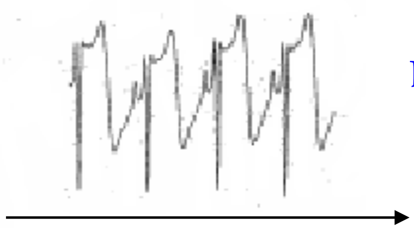
Ritardo di fase

Fase non lineare

6π

0





Tempo (s)

Distorsione

FILTRI FIR

VANTAGGI

- ✓ **Fase Lineare** ⟺ h(n) simmetrica (pari o dispari)
- ✓ Sempre **stabili** (poli nell'origine)
- ✓ Elevata Flessibilità
- ✓ |H(z)| maggiormente costante in banda passante (< distorsioni)
- ✓ Uso di algoritmi veloci (FFT) per diminuire la velocità di calcolo in fase di progetto

SVANTAGGI

- ✓ Prestazioni elevate solo con numero elevato di campioni.
- ✓ Elevati tempi di calcolo
- ✓ **Poli solamente nell'origine**
- ✓ Non esiste una famiglia standard
- ✓ Imprecisione nella scelta di ω_c

FILTRI IIR

VANTAGGI

- ✓ Famiglie Classiche di Filtri (B, C, E)
- ✓ Basse difficoltà computazionali
- ✓ Elevate prestazioni anche con pochi coefficienti (~filtri ideali)
- ✓ **Poli** posti **in qualunque posizione** all'interno del cerchio unitario

SVANTAGGI

- ✓ Scarsa flessibilità di prestazioni (solo filtri tradizionali)
- ✓ **Fase non lineare**
- ✓ Possono divenire instabili anche se il filtro analogico di partenza è stabile