Esercizi Geometria 3A

27/11/2017

1. Si consideri la funzione $\varphi(u,v) = (u^2, uv^2, v)$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ e sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0): u \leq 0\}$. Si provi che la restrizione di φ ad A è una parametrizzazione di una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, mostrando che A è un aperto massimale rispetto a tale proprietà (ovvero, preso un qualunque aperto B; $A \subseteq B$, φ ristretto a B non è una parametrizzazione regolare).
   Scelta una orientazione di Σ, si descriva l'immagine della mappa di Gauss N ad essa associata e si dica in particolare se N è suriettiva.

2. Sia $\gamma(s)$ una curva differenziabile e biregolare in $\mathbb{R}^3$ e sia Σ la superficie generata da tutte le rette binormali a γ. Trovare una parametrizzazione di Σ e dare condizioni affinché tale parametrizzazione sia regolare. Calcolare la prima forma fondamentale di Σ.

3. Sia $F: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(p) = (x^2 - y^2, xy, yz)$, $\forall p = (x,y,z) \in \mathbb{S}^2$. Poniamo inoltre $N = (0,0,1)$ ed $E = (1,0,0)$. Si dimostri che F ristretta a $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, -N, E, -E\}$ ha differenziale iniettivo in ogni punto, calcolando esplicitamente la matrice che rappresenta localmente il differenziale.