I PROVETTA DI GEOMETRIA 3 – A.A. 2017/18
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Trieste, 22 novembre 2017

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. Si consideri la funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\varphi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$, con $b > 0$.
(i) Verificare che $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare.
(ii) Descrivere le curve coordinate su S $\varphi(u_0, v)$ e $\varphi(u, v_0)$.
(iii) Dare una descrizione geometrica della superficie S.
(iv) Verificare che l'asse z è contenuta in S e determinare il piano tangente in un suo punto generale.

2. Si consideri la curva

$$\alpha(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}})$$

con $-1 < t < 1$. Verificare che si tratta di una curva biregolare e calcolare la sua funzione curvatura e il triedro di Frenet.

3. Sia β una curva biregolare. Si consideri in ogni suo punto la retta normale, cioè la retta passante per $\beta(t)$ avente il versore normale come vettore di direzione. Si supponga che tutte le rette normali nei punti di β passino per un punto fisso P. Dimostrare che β è una curva piana a curvatura costante e dedurre che è una parametrizzazione di un arco di circonferenza.