LEZIONE 36

A matrice $n \times n$, simmetrica, ad entrate in $\mathbb{R}$, oppure in $\mathbb{C}$.
Ieri abbiamo visto che esiste una matrice invertibile P tale che ${}^tPAP$ è diagonale. Il metodo illustrato per trovare tale matrice diagonale mostra che questa non è unica.

Cerchiamo di ~~raffinare~~ migliorare il procedimento.

Abbiamo visto che esistono matrici invertibili P tali che $P^{-1} = {}^tP$. Si chiamano matrici ortogonali. Se riusciamo a trovare un metodo per

$$A \text{ simmetrica} \qquad A \rightsquigarrow {}^tPAP = D \text{ diagonale e}$$
$$P \text{ è matrice ortogonale}$$

allora D oltre che congruente ad A, sarebbe anche simile ad A:

$$D = {}^tPAP = P^{-1}AP$$

Quindi D ed A avrebbero lo stesso polinomio caratteristico, quindi gli stessi autovalori, autospazi, ...
Una tale D è essenzialmente unica SPIEGARE

~ o ~

A matrice $n \times n$ simmetrica, ad entrate in $\mathbb{R}$.
Consideriamo $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Abbiamo visto tempo fa che, se P è m. ortogonale, allora le colonne di P formano una base ON di $\mathbb{R}^n$ risp. $\langle\, ,\rangle_{st}$.
Lo stesso vale per le righe di P.
Domanda "vaga": qual'è il legame tra L_A e $\langle\, ,\rangle_{st}$?
In questo "legame" dovrebbe entrare in gioco il fatto che A è simmetrica.

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ arbitrari

$$\langle Au, v\rangle_{st} = \underbrace{{}^t(Au)\, v}_{R\times C} = ({}^t u\, {}^t A)\, v \underset{A={}^tA}{=} ({}^t u A)\, v = {}^t u (Av) = \langle u, Av\rangle_{st}$$

Questa proprietà di L_A sarà la chiave del nostro metodo. Formalizziamo:

Def Sia V uno spazio vettoriale <u>euclideo</u>, cioè V è uno spazio vettoriale <u>/$\mathbb{R}$</u>, ed è fissato un <u>prodotto scalare</u> $\varphi : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ su V.
Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ si dice <u>AUTOAGGIUNTO</u> se $\forall u, v \in V$ si ha

$$\varphi(f(u), v) = \varphi(u, f(v))$$

$\mathcal{B}_c$: la base canonica di $\mathbb{R}^n$. È base ON per $\langle\, ,\, \rangle_{st}$

$A = M_{\mathcal{B}_c}(L_A)$.

<u>PROP.</u> (V, φ) spazio vett. euclideo, $\mathcal{B}$ base ON di V risp φ. $f : V \longrightarrow V$ endomorfismo autoaggiunto. Allora $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ è simmetrica.

<u>Dim.</u> La base $\mathcal{B}$ ci permette di pensare i vettori di V come matrici colonna $n\times 1$ ($n = \dim(V)$). Stiamo usando implicitamente $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ $K_{\mathcal{B}}(v_1) = e_1, \dots, K_{\mathcal{B}}(v_n) = e_n$ la $\mathcal{B}_c$.
Essendo, inoltre, $\mathcal{B}$ base di V, ON risp. φ si ha

$$\forall u, v \in V \qquad \varphi(u, v) = \underbrace{{}^t u \cdot v}_{R\cdot C}$$

Dobbiamo provare che $A = {}^tA$, ovvero che $a_{ij} = a_{ji}$ $(\forall i, j \quad 1 \le i, j \le n)$

$f(v_i)$ è l'i-esima colonna di A

$$f(v_i) = \begin{vmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{vmatrix} \qquad \text{Allora} \qquad a_{ji} = \underbrace{{}^t f(v_i) \cdot e_j}_{R \times C}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & \text{---} & a_{ji} & \text{---} & a_{ni} \end{vmatrix} \overset{e_j}{\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}} = a_{ji}$$

$$\underline{\underline{a_{ji}}} = {}^t f(v_i) \cdot \overset{v_j}{\overset{\shortparallel}{\widetilde{e_j}}} = \varphi(f(v_i), v_j) = \varphi(v_i, f(v_j)) =$$

$$= e_i \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{vmatrix}}_{\text{la } j\text{-esima colonna di } A} = \underline{\underline{a_{ij}}}$$

■

MATRICI ORTOGONALI

Def. A matrice $n \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$, si dice matrice <u>ORTOGONALE</u> se A è invertibile e $\underline{A^{-1} = {}^tA}$

- Sia A una matrice ortogonale. Allora:

$$\underbrace{A\,{}^tA}_{R \times C} = AA^{-1} = I_n \iff \text{le } \underline{\text{righe}} \text{ di } A \text{ formano una base di } \mathbb{R}^n, \text{ ON risp. } \langle\ ,\ \rangle_{st}$$

$$\widetilde{{}^tA\,A} = A^{-1}A = I_n \iff \text{le } \underline{\text{colonne}} \text{ di } A \text{ formano una base di } \mathbb{R}^n, \text{ ON risp. } \langle\ ,\ \rangle_{st}$$

- Inoltre, se A è ortogonale allora

$$A\,{}^tA = I_n \Rightarrow \det(A) \cdot \det({}^tA) = 1 \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\det(A) = \pm 1}$$

- A, B m. ortogonali $\Rightarrow AB$ è matrice ortogonale

Innanzitutto da A, B invertibili segue che anche AB è invertibile:

$$\det(AB) = \underset{\neq 0}{\det(A)} \cdot \underset{\neq 0}{\det(B)} \neq 0$$

Allora

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$$

Il vero problema per diagonalizzare una matrice simmetrica, ad entrate <u>in $\mathbb{R}$</u>, è che non sappiamo **NIENTE** dei suoi autovalori. Non sappiamo nemmeno se esiste un solo autovalore.

A matrice $n \times n$, simmetrica, ad entrate in $\mathbb{R}$

$p_A(\lambda)$ è un polinomio in λ, di grado n, a coeff. <u>in $\mathbb{R}$</u>

Lo posso pensare come un polinomio a coeff. <u>in $\mathbb{C}$</u>.

Ho che

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_r)^{m_r} \qquad m_1 + \ldots + m_r = n$$

A priori $a_h \in \mathbb{C}$ per ogni $h = 1, \ldots, r$.

Il punto cruciale sarà dimostrare il seguente

LEMMA

Con le notazioni (e le ipotesi) introdotte sopra si ha che

$\underline{a_h \in \mathbb{R}}$ per ogni $h = 1, \ldots, r$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^n \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[L_A]{} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

qui abbiamo $\langle\ ,\ \rangle_{st}$ e L_A è a.a.

e qui??? .....

[redacted] 23/11/07 [redacted]

Per risolvere alcune situazioni delicate abbiamo bisogno di usare i numeri <u>complessi</u>, essenzialmente per poter usare il "Teorema Fondamentale dell'Algebra": ogni polinomio a coeff. complessi, di grado ≥ 1, ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.

~o~

Quel che vogliamo fare adesso è vedere come si possa adattare la definizione di prodotto scalare al caso dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ sul campo $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}^n \ni \cancel{(z_1, \dots, z_n)} \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix}$ $\quad z_h \in \mathbb{C} \quad z_h = x_h + i y_h \quad x_h, y_h \in \mathbb{R} \quad \forall h = 1, \dots, n$

SOMMA in $\mathbb{C}^n$ $\quad \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} z_1 + w_1 \\ \vdots \\ z_n + w_n \end{vmatrix}$

PRODOTTO di un vettore di $\mathbb{C}^n$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{vmatrix} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{vmatrix}$

funziona <u>tutto</u> come su $\mathbb{R}$: dip. e indip. lineare, comb. lineari, basi, dimensioni, matrici, determinanti, appl. lineari, autovettori, autovalori...

~o~

Ricordiamo che un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ che è BILINEARE, SIMMETRICA, DEFINITA POSITIVA. Cerchiamo "qualcosa di analogo" su $\mathbb{C}^n$.

Partiamo dall'ultima condizione:

<u>DEFINITA POSITIVA</u> (su $\mathbb{R}$) $\quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad$ e $\quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

Il problema con i numeri complessi è che <u>non esiste</u> in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con le operazioni:

$z < z' \Rightarrow z + w < z' + w \quad \forall w \in \mathbb{C}$

$z < z', \ w > 0 \Rightarrow wz < wz'$

Il problema è che non è proprio possibile definire che cosa dovrebbe intendersi per un numero complesso > 0.

Qualche "esperimento": supp. $0 < 1$. Se $i > 0$, allora $0 = 0 \cdot i < i \cdot i$ allora $0 < i^2 = -1$, cioè $0 < -1$. Comunque si provi non funziona.

Sarebbe indispensabile per poter avere la proprietà DEF. POSITIVO che $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ fosse tale che

$\langle u,u\rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $u \in \mathbb{C}^n$.

Per questo è sufficiente modificare leggermente la def. di simmetria:

il complesso coniugato

$$\cancel{\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle} \qquad (*) \quad \underbrace{\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}}_{OK}$$

SIMMETRIA HERMITIANA

Infatti, in tal caso

$$\langle u,u\rangle = \overline{\langle u,u\rangle} \iff \underline{\langle u,u\rangle \in \mathbb{R}}$$

e allora si può richiedere che valga la cond. DEF. POS., enunciata nel solito modo.

La (*) ha conseguenze [redacted] sulla bilinearità. Siamo liberi di chiedere che $\langle\ ,\ \rangle$ sia $\mathbb{C}$-lineare nel primo argomento:

Per ogni $v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle u+u',v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u',v\rangle \qquad \forall u,u' \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Allora

$\bar{\bar{z}} = z$

$$\langle u,v+v'\rangle = \overline{\langle v+v',u\rangle} = \overline{\langle v,u\rangle + \langle v',u\rangle} = \overline{\langle v,u\rangle} + \overline{\langle v',u\rangle} =$$

$$= \langle u,v\rangle + \langle u,v'\rangle$$

MA:

$$\langle u,\lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v,u\rangle} = \overline{\lambda\langle v,u\rangle} = \bar{\lambda}\,\overline{\langle v,u\rangle} = \bar{\lambda}\langle u,v\rangle$$

Quindi, volendo tenere la proprietà (*) non possiamo richiedere che $\langle\_,\_\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ sia BI-lineare, ma solo

SL1) $\langle u+u',v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u',v\rangle$

SL2) $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$

SL3) $\langle u,v+v'\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,v'\rangle$

$\forall \ldots$ SCRIVERE! — queste le dovrei richiedere anche per la BI-linearità

SL4) $\langle u,\lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u,v\rangle$ — solo questa è diversa

23/11/17

Si dice che $\langle -,- \rangle$ è SESQUILINEARE (cioè 1,5-LINEARE, invece di 2-lineare = BI-lineare).

Def. Un PRODOTTO SCALARE HERMITIANO su $\mathbb{C}^n$ è un'applicazione $\langle -,- \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ che gode delle seguenti proprietà:

1. SESQUILINEARITÀ [le (SL1), ..., (SL4) di pag. precedente], ovvero $\langle -,- \rangle$ è $\mathbb{C}$-lineare nel primo argomento e $\mathbb{C}$-semilineare nel secondo argomento.
2. SIMMETRIA HERMITIANA $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$ $\forall\, u,v \in \mathbb{C}^n$
3. è DEFINITO POSITIVO $\langle u,u \rangle \geq 0$ $\forall u \in \mathbb{C}^n$ e $\langle u,u \rangle = 0 \iff u = 0_{\mathbb{C}^n}$.

ESEMPIO: il pr. scal. herm. STANDARD di $\mathbb{C}^n$

$v \in \mathbb{C}^n$ $\quad v = \begin{vmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$ $\quad \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{vmatrix}$ $\quad \boxed{\langle u,v \rangle_{st} = {}^t u \overline{v}}$

Se $u = \begin{vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}$ allora $\langle u,v \rangle_{st} = u_1 \overline{v_1} + \ldots + u_n \overline{v_n}$

Si verifica facilmente che valgono le proprietà richieste.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $(a \mapsto a + i0 \in \mathbb{C}) \Rightarrow \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ Allora, presi cmq $u,v \in \mathbb{R}^n$ si ha $\underline{\langle u,v \rangle_{st,\mathbb{R}} = \langle u,v \rangle_{st,\mathbb{C}}}$.

~ o ~

$\mathbb{C}^n$ con $\langle \, , \, \rangle$ pr. scal. herm. fissato è detto SPAZIO (VETTORIALE) UNITARIO (d'ora in poi lo supporremo)

($\mathbb{R}^n$ con $\langle \, , \, \rangle$ pr. scalare fissato è detto SPAZIO (VETT.) EUCLIDEO)

$u \in \mathbb{C}^n$ $\quad \|u\| \overset{def}{=} \sqrt{\langle u,u \rangle}$ $\quad \|u\| = 0 \iff u = 0_{\mathbb{C}^n}$

[redacted] 23/11/17 8

$\lambda \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} \lambda = a+ib \quad a,b \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{C}^n \end{cases}$ $\quad \|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda\bar\lambda \langle u,u\rangle} = |\lambda|\cdot\|u\|$

$\lambda\bar\lambda = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |\lambda|^2$

Se $u, v \in \mathbb{C}^n$, la distanza tra u e v è $d(u,v) \overset{\text{def}}{=} \|u-v\|$

$d(u,v) = d(v,u)$.

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

Per ogni $u,v \in \mathbb{C}^n$ $\quad |\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|$.

[redacted] Vale "=" $\iff$ u,v sono linearmente dipendenti.

Dim.

Presi comunque $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ si ha:

$0 \le \langle \lambda u + \mu v, \lambda u + \mu v\rangle = \lambda\bar\lambda\langle u,u\rangle + \lambda\bar\mu\langle u,v\rangle + \mu\bar\lambda\langle v,u\rangle + \mu\bar\mu\langle v,v\rangle$

Supponiamo $v \neq 0$ (se $v=0$ la disug di CS è verificata).

Allora $\langle v,v\rangle > 0$ e si può porre $\lambda = \langle v,v\rangle$ in

$0 \le \langle v,v\rangle^2\langle u,u\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle}\bar\mu\langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle}\mu\langle v,u\rangle + \mu\bar\mu\cancel{\langle v,v\rangle}$

$0 \le \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle + \mu\bar\mu + \bar\mu\langle u,v\rangle + \mu\langle v,u\rangle$

Poniamo in $\uparrow$ $\mu = -\langle u,v\rangle$; otteniamo:

$0 \le \|u\|^2\cdot\|v\|^2 + \cancel{\langle u,v\rangle\overline{\langle u,v\rangle}} - \cancel{\langle u,v\rangle\overline{\langle u,v\rangle}} - \langle u,v\rangle\overline{\langle u,v\rangle}$

$|\langle u,v\rangle|^2 \le \|u\|^2\cdot\|v\|^2 \xRightarrow{\sqrt{}} |\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|$ la C-S

È chiaro che se u,v sono lin. dipendenti, allora vale "=".

Viceversa, se $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$, se $v=0$ allora u,v sono lin. dipendenti. Se $v\neq 0$, posto come sopra $\lambda = \langle v,v\rangle$ e $\mu = -\langle u,v\rangle$ si ha che

$\langle \lambda u+\mu v, \lambda u+\mu v\rangle = 0 \implies \lambda u+\mu v = 0$

■

<u>Def</u> $u, v \in \mathbb{C}^n$ si dicono <u>ortogonali</u> se $\langle u, v \rangle = 0$

$v_1, \dots, v_n$ base arbitraria di $\mathbb{C}^n$

$\Downarrow$ procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt funziona nello stesso identico modo

$u_1, \dots, u_n$ base <u>ON</u> di $\mathbb{C}^n$

Il procedimento prevede anche $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ $\forall\, k = 1, \dots, n$.

$w \in \mathbb{C}^n$ arbitrario $\quad w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ chi sono i "λ"?

$$\langle w, u_i \rangle = \langle \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, u_i \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle u_1, u_i \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_i \underbrace{\langle u_i, u_i \rangle}_{=1} + \dots$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_k = \langle w, u_k \rangle} \quad \forall\, k = 1, \dots, n$$

$E \subset \mathbb{C}^n$ sottoinsieme

$E^\perp = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \langle u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in E\}$ è <u>sottospazio vett.</u> di $\mathbb{C}^n$

$W \subset \mathbb{C}^n$ sottosp. vett. $\dim(W) = r$

$w_1, \dots, w_r$ base di W

$\underline{w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n}$ base di $\mathbb{C}^n$

$\downarrow$ GS

$u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ base ON

$W = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_r) \qquad W^\perp = \mathrm{Span}(u_{r+1}, \dots, u_n)$

$\dim_{\mathbb{C}}(W^\perp) = n - r$

SOMMA DIRETTA <u>ORTOGONALE</u>

$W \cap W^\perp = \{0\} \qquad \underline{W \oplus W^\perp = \mathbb{C}^n}$

Si ha anche la <u>formula di POLARIZZAZIONE</u>:

FARE

In uno spazio vettoriale euclideo V si ha:

$\forall u, v \in V$ $$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle}_{=} + \langle v,v\rangle$$

$$2\langle u,v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \Rightarrow \langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$

form. di POLARIZZAZIONE.

Se V è uno spazio unitario, con prod. scalare herm. $\langle\,,\rangle$, allora $\forall u, v \in V$ si ha

$$\langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{\overline{\langle u,v\rangle}} + \|v\|^2$$ dunque

$\langle u+v\rangle + \langle v,u\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle u,v\rangle$

$$\langle u+iv, u+iv\rangle = \|u\|^2 \underbrace{- i\langle u,v\rangle + i\langle v,u\rangle}_{(*)} + \|v\|^2$$

$\langle u,v\rangle = a+ib \quad a,b\in\mathbb{R}$. Allora

$$(*) = -i(a+ib) + i(a-ib) = -ia + b + ia + b = 2b = 2\,\mathrm{Im}(\langle u,v\rangle)$$

Quindi:

$$\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\,\langle u,v\rangle + i\,\mathrm{Im}\,\langle u,v\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) + i\,\frac{1}{2}\left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$