LEZIONE 37 **IL TEOREMA SPETTRALE** 27/11/17 (1)

A matrice $n \times n$, ad entrate reali, SIMMETRICA.

A è diagonalizzabile?

O, meglio: l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è diagon.?

Il fatto che A sia "speciale" (è simmetrica !!) dovrebbe riflettersi in qualche proprietà particolare di L_A.

Abbiamo già dimostrato la

PROPOSIZIONE

Sia $\langle \, , \rangle$ un prodotto scalare (qualsiasi) sullo spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{R}$. Si dice che $(V, \langle \, , \rangle)$ è uno spazio euclideo. Sia $\mathcal{B}$ una base ON di V. Infine, sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Allora

$A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica $\Longleftrightarrow$

(*) $\boxed{\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle \quad \text{per ogni } u, v \in V}$

Def. (Con le notazioni introdotte nell'enunciato della proposizione precedente) si dice che f è AUTOAGGIUNTO se e solo se vale (*).

Quindi vogliamo diagonalizzare un endomorfismo f autoaggiunto.

Il problema è che non sappiamo nulla sugli autovalori di f

$\mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}_c$ $\qquad$ $\mathcal{B}_c$: la base canonica di $\mathbb{C}^n$

PASSAGGIO DAL REALE AL COMPLESSO $\quad$ (0)

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "K_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "L_A"] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "L_A"] \\
V \arrow[r, "K_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, hook] & \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

$\langle \, , \rangle_{st, \mathbb{C}}$: il prod. scalare hermit. standard di $\mathbb{C}^n$

$\langle \, , \rangle \rightsquigarrow \langle \, , \rangle_{st, \mathbb{R}}$

U: spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.
$\varphi: U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$ sia un prodotto scalare hermitiano su U
cioè
- φ è sesquilineare
- $\varphi(u, u') = \overline{\varphi(u', u)}$ $\quad \forall u, u' \in U$ $\quad (\Rightarrow \varphi(u,u) \in \mathbb{R} \ \forall u \in U)$
- φ è definita positiva.

(U, φ) è detto SPAZIO (VETTORIALE) UNITARIO.

$f: U \longrightarrow U$ endomorfismo, cioè f è $\mathbb{C}$-lineare.

Def. f è detto AUTOAGGIUNTO (rispetto a φ!) se vale
$$\varphi(f(u), v) = \varphi(u, f(v)) \qquad \forall u, v \in U$$

PROPOSIZIONE
(U, φ) sia uno spazio unitario, e $\mathcal{B}$ sia una base di U, ON rispetto φ. Allora un endomorfismo $f: U \to U$ è autoaggiunto $\Longleftrightarrow$ $B = M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice hermitiana, cioè

(1) $\boxed{B = {}^t\overline{B}}$ $\quad$ (è la nozione di matrice simmetrica $/\mathbb{C}$) SPIEGARE

Dim. Con l'isomorfismo $U \xrightarrow{K_{\mathcal{B}}} \mathbb{C}^n$ di sp. vett. $/\mathbb{C}$
ho la "traduzione" della mia situazione

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ {\scriptstyle K_{\mathcal{B}}}\downarrow{\scriptstyle \wr} & & {\scriptstyle \wr}\downarrow{\scriptstyle K_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow[L_B]{} & \mathbb{C}^n \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \mathcal{B} & \varphi \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{B}_c & \langle\ ,\ \rangle_{st,\mathbb{C}} \end{array}$$

Ricordiamo che $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$
$$\boxed{\langle u, v \rangle_{st,\mathbb{C}} = {}^t u\, \overline{v}}$$

Supponiamo, allora, che valga la $B = {}^t\overline{B}$. Allora
(Se $u \in U$, indicheremo ancora $K_{\mathcal{B}}(u)$, con "u" SPIEGARE)

$$\varphi(f(u), v) = \langle L_B(u), v \rangle_{st,\mathbb{C}} = {}^t(Bu)\,\overline{v} = ({}^tu\,{}^tB)\,\overline{v} \underset{\text{SPIEG.}}{=} {}^tu\,\overline{B}\,\overline{v}$$

$$= {}^tu(\overline{Bv}) = \langle u, L_B(v) \rangle_{st,\mathbb{C}} = \varphi(u, f(v))$$

Quindi (1) $\Rightarrow$ f è autoaggiunto.

Viceversa, suppongo che f sia autoaggiunto.
Allora, per ogni $u, v \in \mathbb{C}^n$ (NB !) si ha che:

$$\underline{{}^tu\,{}^tB\,\overline{v}} = {}^t(Bu)\,\overline{v} = \langle Bu, v \rangle_{st,\mathbb{C}} = \langle L_B(u), v \rangle_{st,\mathbb{C}} =$$

$$= \varphi(f(u), v) \underset{\uparrow}{=} \varphi(u, f(v)) = \langle u, L_B(v) \rangle_{st,\mathbb{C}} = {}^tu(\overline{Bv}) =$$

qui ho usato l'ip. che f sia autoaggiunto

$$= \underline{{}^tu\,\overline{B}\,\overline{v}}$$

Riassumo:
$${}^tu\,{}^tB\,\overline{v} = {}^tu\,\overline{B}\,\overline{v} \qquad \forall u, v \in \mathbb{C}^n \quad (4)$$

LEMMA

COMMENTARE

M, N siano matrici $n \times n$, ad entrate complesse t.c.
${}^tu M \overline{v} = {}^tu N \overline{v}$ $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$. Allora $M = N$.

Dim. $e_1, \ldots, e_n$ sia la base canonica di $\mathbb{C}^n$. Allora,
se scelgo $u = e_i$

$e_i M = | m_{i1} \; m_{i2} \; \ldots \; m_{in} |$ trovo l'i-esima riga di M

Scelgo, allora, $v = e_j$ $(= \underline{\overline{e_j}})$

$$e_i M e_j = | m_{i1} \ldots m_{ij} \ldots m_{in} | \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} = m_{ij}$$

j-esimo posto

Analogamente si ha

$e_i N e_j = n_{ij}$ $\quad \forall i, \forall j$ $\quad \Longrightarrow M = N$ ∎

Applicando il lemma a (4) si conclude la dim. della proposizione. Infatti si ottiene

$$ {}^tB = \overline{B} \Rightarrow {}^t({}^tB) = {}^t\overline{B} \quad \text{cioè} \quad B = {}^t\overline{B} $$ ∎

Ritornando al nostro problema originale, se A è una matrice $n \times n$ reale, simmetrica, allora A, pensata come matrice ad entrate in $\mathbb{C}$, è una matrice hermitiana:

$$ A \text{ reale} \Leftrightarrow A = \overline{A} \qquad \text{Allora} \qquad A \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ è simm}}}{=} {}^tA = {}^t\overline{A} $$

Quindi $L_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ è un endomorfismo autoaggiunto rel. a $\langle\, ,\, \rangle_{st,\mathbb{C}}$.

Il polinomio caratteristico di $L_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ è

$\det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$.

Il "teorema fondamentale dell'Algebra" ci assicura che esiste $a \in \mathbb{C}$ tale che $p_A(a) = 0$.

Quindi posso pensare tale a come autovalore di $L_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Allora esiste $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$

tale che $\quad L_A(u) = a u$.

Utilizziamo il fatto che L_A è autoaggiunto rispetto $\langle\, ,\, \rangle_{st,\mathbb{C}}$

$$ \langle L_A(u), u \rangle_{st,\mathbb{C}} = \langle u, L_A(u) \rangle_{st,\mathbb{C}} = \langle u, a u \rangle_{st,\mathbb{C}} = \overline{a} \underbrace{\cancel{\langle u, u \rangle_{st,\mathbb{C}}}}_{\in \mathbb{R},\ >0} $$

$$ \| $$

$$ \langle a u, u \rangle_{st,\mathbb{C}} = a \cancel{\langle u, u \rangle_{st,\mathbb{C}}} \Rightarrow \overline{a} = a \Rightarrow a \in \mathbb{R} $$

PROPOSIZIONE

Se (U, φ) è uno spazio vettoriale unitario qualsiasi, e se $f: U \longrightarrow U$ è un endomorfismo autoaggiunto (risp. φ), allora ogni autovalore di f è in $\mathbb{R}$.

Il "passaggio dal reale al complesso" mostra che si ha il

COROLLARIO

Se $(V, \langle , \rangle)$ è un qualsiasi spazio vettoriale euclideo, e se $f: V \longrightarrow V$ è un endomorfismo autoaggiunto (risp. $\langle , \rangle$), allora ~~[illegible]~~ $p_f(\lambda)$ si scompone nel prodotto di $n = \dim(V)$ polinomi lineari, a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$(\ast) \quad p_f(\lambda) = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_1} \cdots (\lambda - a_r)^{m_r} \qquad a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$$

$$m_1 + \ldots + m_r = n$$

(Cioè vale la condizione (i) per la diagonalizzazione di f). Analogamente, se A è una matrice $n \times n$, ad entrate reali, simmetrica, allora $p_A(t)$ si scompone come in $(\ast)$.

TEOREMA SPETTRALE

Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo (con $\dim(V) \geq 1$), e sia $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ON di V, tutta formata da autovettori di V.

In particolare, f si diagonalizza.

Dim.

La dim. è per induzione su n. Per $n = 1$, tutto OK.

Sia $n > 1$.

Sia $a \in \mathbb{R}$ un autovalore per f. Sia $v \in V$ un autovettore per f rel. all'autovalore a. Dunque $v \neq 0_V$ e $f(v) = a v$. Pongo $u_1 \stackrel{def}{=} \frac{v}{\|v\|}$ è ancora autovettore, di autoval. a, $\|u_1\| = 1$

(naturalmente, le norme sono calcolate mediante il prodotto scalare $\langle , \rangle$, fissato in V).

Sia $W \subset V$ il sottospazio vettoriale generato da v (oppure da u_1, è lo stesso). Dunque $\dim(W) = 1$.

Abbiamo visto in una lezione precedente che $\dim(W^\perp) = n-1$ e $V = W \oplus W^\perp$.

Sia $t \in W^\perp$, arbitrario. Questo equivale a $\langle t, u_1 \rangle = 0$

Si ha $\underline{f(t) \in W^\perp}$. Infatti:

$$\langle f(t), u_1 \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è a.agg.}}}{=} \langle t, f(u_1) \rangle = \langle t, a u_1 \rangle = a \overbrace{\langle t, u_1 \rangle}^{=0} = 0$$

Allora si ha l'endomorfismo $f|_{W^\perp} : W^\perp \longrightarrow W^\perp$, che è chiaramente autoaggiunto risp. alla restrizione del prodotto scalare $\langle , \rangle$ a $W^\perp \times W^\perp$.

$\dim(W^\perp) = n-1$, quindi posso applicare l'ipotesi induttiva: esiste una base ON $u_2, \dots, u_n$ di $W^\perp$ tutta formata da autovettori di $f|_{W^\perp}$, quindi autovettori di f.

Poiché $u_1 \perp u_h$ $\forall h \geq 2$, $u_1, \dots, u_n$ è una base ON di V, tutta formata da autovettori di f.

E la dimostrazione è completa. ∎

Vediamo il tutto dal punto di vista delle matrici.

Se $\mathcal{B}$ è una qualsiasi base ON di V, allora $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica ($f: V \longrightarrow V$ è autoaggiunto).

Sia $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ la base costruita nella dimostrazione qui sopra.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \mathcal{B} \\ V & \xrightarrow{f} & V \\ id_V \uparrow & & \downarrow id_V \\ V & \xrightarrow{f} & V \\ \mathcal{C} & & \mathcal{C} \end{array}$$

$P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_W)$ è ~~la~~ una matrice di cambiamento di base.

Dunque

$P^{-1}AP$ è matr. diagon.

Ma P ha qualcosa in più!!!

$\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ è base ON per V risp. $\langle\, , \rangle$

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} p_{11} & & \\ p_{21} & & \\ \vdots & \text{ecc.} & \\ p_{n1} & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ \\ w_n \end{array} \\ u_1 \quad \cdots \quad u_n \end{array}$$

$u_1 = p_{11} w_1 + p_{21} w_2 + \ldots + p_{n1} w_n$

$\underline{\mathcal{B} \text{ è base ON}}$

$1 = \|u_1\| \Rightarrow \quad 1 = \langle u_1, u_1 \rangle = \langle p_{11} w_1 + \ldots + p_{n1} w_n, p_{11} w_1 + \ldots + \rangle =$

$$= p_{11}^2 + p_{21}^2 + \ldots + p_{n1}^2$$

Analogamente, per le altre colonne di P si ha che

$$1 = \|u_j\| \Rightarrow \quad p_{1j}^2 + \ldots + p_{nj}^2 = \left\langle \begin{vmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{vmatrix} \right\rangle_{st, \mathbb{R}} = 1$$

Infine, se $1 \le j < k \le n$, allora si ha

$$\langle u_j, u_k \rangle = 0 \Rightarrow p_{1j} p_{1k} + \ldots + p_{nj} p_{nk} = \left\langle \begin{vmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1k} \\ \vdots \\ p_{nk} \end{vmatrix} \right\rangle_{st, \mathbb{R}} = 0$$

Dunque, le colonne di P formano una base ON per $\mathbb{R}^n$, rispetto a $\langle\, , \rangle_{st, \mathbb{R}}$.

Quindi P è una matrice ortogonale, cioè $P^{-1} = {}^tP$

COROLLARIO

Se A è una matrice $n \times n$, ad entrate in $\mathbb{R}$, simmetrica allora esiste una matrice ortogonale P, $n \times n$ tale che:

$$\boxed{D = P^{-1}AP = {}^tPAP}$$ D matr. diagonale $n \times n$

Dunque A, D sono matrici simili, ma anche congruenti.

Dall'enunciato del Teorema Spettrale "si vede" che se $u, v \in V$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti $a, b \in \mathbb{R}$ (dif), allora $u \perp v$. Dimostriamolo direttamente.

$f: V \to V$ autoaggiunto $\quad u, v \in V \quad u \neq 0_V, v \neq 0_V$ sono tali che $f(u) = au \quad f(v) = bv$ con $a \neq b$.

Allora almeno uno tra a, b è $\neq 0_{\mathbb{R}}$. Sia $a \neq 0$.

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{a} \langle au, v \rangle = \frac{1}{a} \langle f(u), v \rangle = \frac{1}{a} \langle u, f(v) \rangle =$$

$$= \frac{1}{a} \langle u, bv \rangle = \frac{b}{a} \langle u, v \rangle \Rightarrow \left(\frac{b}{a} - 1\right) \langle u, v \rangle = 0$$

$b \neq a \Leftrightarrow \frac{b}{a} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} - 1 \neq 0$. Allora, necessariamente

$\langle u, v \rangle = 0$