

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 7

Trieste, 27 novembre 2017

1. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 nella indeterminata t . Considerare i polinomi $p_1(t) = t^2 - 2t$, $p_2(t) = 1 + 2t$, $p_3(t) = 2 - t^2$, $q_1(t) = -1 + t$, $q_2(t) = -1 + t - t^2$, $q_3(t) = 2t + 2t^2$. Dimostrare che $B = (p_1, p_2, p_3)$ e $B' = (q_1, q_2, q_3)$ sono due basi di V e determinare la matrice di passaggio da B a B' .

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B_1 formata da $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, e B' da $(1, 0)$, $(1, 1)$.

3. Siano dati i seguenti vettori in \mathbb{Q}^3 : $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 2)$, $w_1 = (3, 1, 0)$, $w_2 = (-1, 0, 2)$, $w_3 = (0, 2, 0)$. Dimostrare che esiste un unico endomorfismo T di \mathbb{Q}^3 tale che $T(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$, e trovare le matrici associate a T rispetto alla base B e rispetto alla base canonica.

4. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

5. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

6. Siano x_1, \dots, x_n delle indeterminate. Dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

Si tratta del determinante detto *di Vandermonde*. (Suggerimento: trasformare la prima colonna in $(1, 0, 0, \dots, 0)$, con trasformazioni elementari sulle righe come segue: togliere a ogni riga un multiplo della riga precedente, ...)