LEZIONE 38

ESERCIZIO 1

Diagonalizzare la matrice simmetrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mediante una matrice ortogonale.

$$p_A(\lambda) \underset{det}{=} \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 9 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 9 = \underline{\lambda^2 - 6\lambda - 1}$$

regola di Cartesio

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \underbrace{3 \pm \sqrt{10}}$$

uno è >0, l'altro è <0

La molteplicità algebrica di entrambi gli autovalori è 1.

$$\begin{bmatrix} 2-(3+\sqrt{10}) & 3 \\ 3 & 4-(3+\sqrt{10}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1-\sqrt{10} & 3 \\ 3 & 1-\sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\text{ha det.} = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1-\sqrt{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = 0 \qquad 3x + (1-\sqrt{10})y = 0$$

Un autovettore relativo all'autovalore $3+\sqrt{10}$ è

$$\cancel{v_1 = \begin{vmatrix} 1-\sqrt{10} \\ -3 \end{vmatrix}} \quad \text{o} \quad \underline{v_1 = \begin{vmatrix} \sqrt{10}-1 \\ 3 \end{vmatrix}}$$

Posso trovare una base per l'altro autospazio con conti analoghi. Oppure

$(\mathbb{R}^2, \langle\, ,\, \rangle_{st})$ è uno spazio euclideo

$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad A = M_{\mathcal{B}_c}(L_A)$ è simmetrica $\Rightarrow$

L_A è autoaggiunto. Quindi, la teoria mi dice che

$$W_{3-\sqrt{10}} \perp W_{3+\sqrt{10}}$$

Quindi una base per $W_{3-\sqrt{10}}$ sarà una soluzione non banale di

$$\langle v_1, \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \rangle_{st} = 0 \qquad (\sqrt{10}-1)x + 3y = 0 \qquad v_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{10} \end{vmatrix}$$

Prova:

$$L_A(v_2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+3-3\sqrt{10} \\ 9+4-4\sqrt{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-3\sqrt{10} \\ 13-4\sqrt{10} \end{vmatrix}$$ e si ha anche:

$$(3-\sqrt{10})v_2 = (3-\sqrt{10}) \begin{vmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-3\sqrt{10} \\ 3+10-4\sqrt{10} \end{vmatrix} \quad //$$

Rispetto a $\langle \, , \, \rangle_{st}$:

$$\| v_1 \| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} \qquad \langle v_1, v_1 \rangle = (\sqrt{10}-1)^2 + 9 = 10 - 2\sqrt{10} + 1 + 9 =$$
$$= 20 - 2\sqrt{10}$$

$$u_1 = \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \\ \frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \end{vmatrix}$$ è un versore

Trovare $u_2 \overset{def}{=} \frac{v_2}{\|v_2\|}$

P sia la matrice che ha per colonne u_1, u_2
Allora P è una matrice ortogonale (perché?)

$${}^tP \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Mediante una matrice ortogonale P, diagonalizzare la matrice simmetrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = ? \quad \left|\begin{matrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}\right| = (2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda)$$

$$p_A(\lambda) = 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 6 + 3\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0 \qquad p_A(1) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 & \lambda - 1 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ \hline // \; -5\lambda^2 + 9\lambda - 4 & \\ \quad -5\lambda^2 + 5\lambda & \\ \hline // \quad 4\lambda - 4 & \end{array}$$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4$ ha anche lui 1 come radice

$$\begin{array}{l|l} \lambda^2 - 5\lambda + 4 & \lambda - 1 \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda - 4 \\ \hline -4\lambda + 4 & \end{array}$$

Quindi

$$\boxed{p_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)}$$

Il Teorema Spettrale mi assicura che A è diagonalizzabile. Cerco W_4

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$1 \le \dim(W_4) = m_g(4) \le m_{alg}(4) = 1$$

$$\Rightarrow rg(A - 4I_3) = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{bmatrix}$$

$v_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ è autovettore rel. all'autovalore 4.

(FATE SEMPRE LA PROVA !!!!!)

So per il Teorema Spettrale che $\dim(W_1) = 2$

Inoltre $W_1 \perp W_4$ ma $\dim(W_4^{\perp}) = 3-1=2$

Quindi $W_1 = W_4^{\perp}$.

L'equazione di $W_4^{\perp}$ è

$\left\langle v_1, \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \right\rangle = 0$ cioè $\boxed{x+y+z=0}$

Cerco una base <u>ON</u> di W_1. Un primo vettore lo posso sparare a capocchia: $v_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ (verifica)

$v_1 \perp v_2$ si vede subito.

Per trovare $v_3 \in \mathbb{R}^3$ che sia

ortogonale a v_1 (quindi in $W_4^{\perp} = W_1$) ed anche

ortogonale a v_2

conviene usare il prodotto vettoriale, visto che siamo in $\mathbb{R}^3$. Si fa prima che con Gram-Schmidt.

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = e_2 - e_3 - e_3 + e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} = v_3$$

$\|v_1\| = \sqrt{3}$ $\qquad \|v_2\| = \sqrt{2}$ $\qquad \|v_3\| = \sqrt{6}$

$u_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \quad u_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}$ è una base ON di $\mathbb{R}^3$ tutta formata da autovettori di L_A

u_1 è base ON di W_4

u_2, u_3 è base ON di W_1

$$P \overset{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \end{array}$$

è una matrice ortogonale, e si ha

$$\underline{{}^tPAP = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}$$

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim(V) = n$

$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ base (qualsiasi!) fissata di V.

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ matrice $n \times n$, ad entrate reali

A definisce rispetto a $\mathcal{B}$ la forma bilineare

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{K_{\mathcal{B}}} & \mathbb{R}^n \\ \rotatebox{90}{$\in$}\; u & \longmapsto & \rotatebox{90}{$\in$}\; \underline{u} \end{array} \qquad \psi(u, v) = {}^t\underline{u} A \underline{v}$$

SPIEGARE

oppure (è lo stesso) $\psi(v_i, v_j) = a_{ij}$

Ci chiediamo quando (cioè: sotto quali condizioni per A) $\psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è un prodotto scalare.

ψ è sempre bilineare.

ψ sarà simmetrica $\Leftrightarrow$ A è matrice simm. $\underline{A = {}^tA}$

Il problema è capire quando ψ è definita positiva.

Una prima condizione necessaria per questo è che

$a_{ii} = \psi(v_i, v_i) > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

essendo el-ti di una base, ciascun v_i è $\neq 0_V$.

Questa condizione **non** è sufficiente

Diagonalizziamo la matrice simmetrica A mediante il Teorema Spettrale. Allora esiste una matrice **ortogonale** P $n \times n$ tale che

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad {}^tPAP = D$$

Questa relazione ci dice che D è la matrice che rappresenta φ rispetto alla base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$ formata dalle n colonne di P. Sia $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$.

Allora

$$d_{ii} = \varphi(u_i, u_i) > 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Per lo stesso ragionamento fatto prima.

Quindi un'altra condizione necessaria sulla matrice A affinché φ sia un prodotto scalare è che

ogni autovalore di A deve essere > 0.

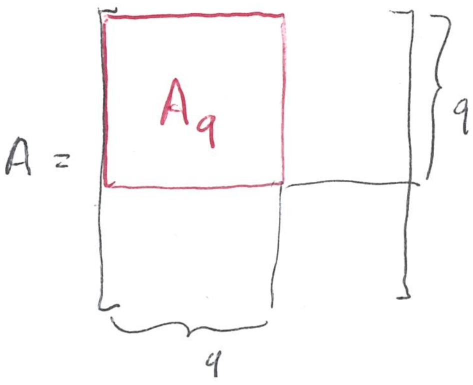
E da questa segue $\det(D) > 0$

Ma

$$\det(D) = \det({}^tPAP) = \det(P)\det(A)\overbrace{\det(P)}^{=\pm 1} = \underbrace{(\det P)^2}_{=1}\det(A)$$

Quindi

$$\det(A) > 0$$



Sia q intero, con $1 \leq q \leq n$

Sia A_q la sottomatrice $q \times q$ di A, ottenuta intersecando le prime q righe con le prime q colonne.

Sia $W \subset V$ il sottospazio vettoriale, avente per base $v_1, \dots, v_q$.

Posso restringere φ a W $\quad \varphi| : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ (cioè "dentro φ" metto solo coppie di vettori, entrambi appartenenti a W). La matrice che rappresenta $\varphi|$ risp. alla base $v_1, \dots, v_q$ di W è, chiaramente A_q.

Se φ è un prodotto scalare, allora $\varphi|$ è ancora un prodotto scalare. Per il ragionamento precedente, deve quindi aversi: $\det(A_q) > 0$.

<u>Riassumendo</u>:

se una matrice A, $n \times n$ ad entrate reali rappresenta rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V un prodotto scalare su V, allora:

1) A è simmetrica

2) $\det(A_q) > 0$ per ogni $q = 1, \dots, n$.

<u>Vale anche il viceversa</u>!