Esercizi Geometria 3A

4/12/2017

1. Sia $F: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(p) = (x^2 - y^2, xy, yz)$, $\forall p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$. Poniamo inoltre $N = (0,0,1)$ ed $E = (1,0,0)$. Si dimostri che F ristretta a $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, -N, E, -E\}$ ha differenziale iniettivo in ogni punto, calcolando esplicitamente la matrice che rappresenta localmente il differenziale.

2. Sia $U := (0,2\pi) \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$ con coordinate (α, r). Si consideri la mappa
$$\phi: U \to \mathbb{R}^3;\ \phi(\alpha, r) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, \log r)$$
e sia $S := \phi(U)$. Si verifichi che S è una superficie differenziabile regolare. Si descrivano le curve $\alpha = cost$ e $r = cost$. Si determini la mappa di Gauss e se ne descriva qualitativamente l'immagine (*Hint*: Osservare che la superficie S è una superficie di rotazione).

3. Sia S una superficie regolare e sia (φ, U) una carta locale di S. Dimostrare che φ è una mappa conforme se e solo se i coefficienti della prima forma fondamentale di S soddisfano le relazioni
$$E = G, \qquad F = 0.$$
Dimostrare che la parametrizzazione della sfera mediante proiezioni stereografiche è conforme. Una parametrizzazione $\varphi(u, v)$ è conforme se gli angoli nel piano uv hanno la stessa misura dei corrispondenti angoli in $T_pS, \forall p \in S$, cioè se lo Jacobiano della φ conserva gli angoli.

4. Si consideri una superficie di rotazione parametrizzata da
$$\varphi(\theta, s) = \big(r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, z(s)\big)$$
dove $\big(r'(s)\big)^2 + \big(z'(s)\big)^2 = 1, \forall s$. Mostrare che
$$L = -r(s)z'(s), \qquad M = 0, \qquad N = z'(s)r''(s) - z''(s)r'(s).$$

5. Si consideri la superficie S con la parametrizzazione
$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale e calcolare le curvature principali. Mostrare che le curve coordinate sono linee di curvatura in S ($\alpha(t)$ è una linea di curvatura se $\alpha'(t)$ è un autovettore della seconda forma fondamentale calcolata nel punto $\alpha(t), \forall t$).