AUTOVETTORI e AUTOVALORI

Sia $f : V \longrightarrow V$ lineare $\dim V = n$

L'obiettivo è trovare una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia "più semplice possibile"

OPPURE

Sia A una matrice l'obiettivo è trovare una matrice simile ad A e "il più semplice possibile"

Lavoriamo su campo K

<u>Def</u>: 1) Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare

$\lambda \in K$ è un <u>autovalore</u> di f se esiste $v \in V$, $v \neq 0$ tale che

$f(v) = \lambda v$.

In questo caso v si dice <u>autovettore</u> di f

2) A matrice $n \times n$

$\lambda \in K$ è un <u>autovalore</u> di A se esiste $v \in K^n$ $v \neq 0$ tale che

$Av = \lambda v$

Oss 1) λ autovalore di A $\Longleftrightarrow$ λ autovalore di $L(A)$ | λ autovalore di f $\Longleftrightarrow$ λ autovalore di $M_{\mathcal{B}}(f)$

2) gli autovettori sono diversi da 0

Attenzione:

- per ogni $\lambda \in K$ $f(0) = \lambda 0$
  ma non tutti i λ sono autovalori
- analogamente per ogni $\lambda \in K$ $A0 = \lambda 0$

IMPORTANTE

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 è un autovalore $\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore per 2

(lungo la direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ A moltiplica per 2)

0 è un autovalore $\quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore per 0

(lungo la direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ A moltiplica per 0)

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ non è un autovettore di A

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{per ogni } \lambda$$

1 non è un autovalore di A

se $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ autovettore di 1

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x \,;\, x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{ASSURDO}$$

In questo caso la matrice è molto semplice ma capire usando semplicemente la definizione quali scalari sono autovalori può essere molto complicato per fortuna ci sono altri metodi.

Def $f: V \rightarrow V$ lineare

$$Aut(\lambda) = \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \}$$
$$= \{\text{autovettori di } \lambda\} \cup \{0\}$$

$Aut(\lambda)$ si chiama autospazio di λ

Oss $\text{Aut}(\lambda)$ è un sottospazio di V

Dim • $0 \in \text{Aut}(\lambda)$ $(f(0) = \lambda 0)$

• $v_1, v_2 \in \text{Aut}(\lambda)$

$$f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2)$$

$$= \mu_1 \lambda v_1 + \mu_2 \lambda v_2 = \lambda(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)$$

$$\Rightarrow \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \in \text{Aut}(\lambda)$$

Oss λ è un autovalore $\Longleftrightarrow$ $\text{Aut}(\lambda) \neq \{0\}$
(sottospazio non banale

Def $m_g(\lambda) = \dim(\text{Aut}(\lambda))$
si chiama la molteplicità geometrica di λ

Oss λ è un autovalore $\Longleftrightarrow$ $m_g(\lambda) \geq 1$

Oss $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\text{Aut}(\lambda_1) \cap \text{Aut}(\lambda_2) = \{0\}$$

Dim $v \in \text{Aut}(\lambda_1) \cap \text{Aut}(\lambda_2)$

$$\Rightarrow f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$$

due possibilità

$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
impossibile
perchè
$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$v = 0$

Concludiamo $v \in Aut(\lambda_1) \cap Aut(\lambda_2) \Rightarrow v = 0$

$\blacksquare$

<u>Proposizione</u> Siano $v_1, \dots, v_m$ autovettori di autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, allora $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

<u>Dim</u> per induzione

<u>$m = 1$</u> v_1 autovettore $\Rightarrow v_1 \neq 0$ da cui la tesi

<u>passo induttivo</u>: supponiamo vero la tesi per $m-1$ vettori

Supponiamo

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m) = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mu_1 f(v_1) + \dots + \mu_m f(v_m) = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_m \lambda_m v_m = 0$$

$$\lambda_m(\underbrace{\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m}_{\overset{\shortparallel}{0}}) - (\underbrace{\lambda_1 \mu_1 v_1 + \dots + \lambda_1 \mu_m v_m}_{\overset{\shortparallel}{0}}) = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\lambda_m \mu_1 - \lambda_1 \mu_1) v_1 + (\lambda_m \mu_2 - \lambda_2 \mu_2) v_2 + \dots + (\underbrace{\lambda_m \mu_m - \lambda_m \mu_m}_{\overset{\shortparallel}{0}}) v_m = 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\lambda_m - \lambda_1)\mu_1 v_1 + \dots + (\lambda_m - \lambda_{m-1})\mu_{m-1} v_m = 0$$

applico ipotesi induttiva ($v_1 \dots, v_{m-1}$ lin. indip.) e ottengo

$$\begin{cases} (\lambda_m - \lambda_1)\mu_1 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_m - \lambda_{m-1})\mu_{m-1} = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{autovalori} \\ \text{distinti} \\ (\lambda_m - \lambda_i) \neq 0 \\ \text{per } i \neq m}]{} \mu_1 = \dots = \mu_{m-1} = 0$$

Avevamo supposto

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mu_1} v_1 + \dots + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mu_{m-1}} v_{m-1} + \mu_m v_m = 0$$

$$\Longrightarrow \mu_m v_m = 0 \Longrightarrow \mu_m = 0$$

$\blacksquare$

Oss: $f: V \to V$ endomorfismo

1) $\mathrm{Aut}(0) = \mathrm{Ker}(f)$

In particolare f non è iniettivo se e solo se 0 è un autovalore di f

2) $\mathrm{Aut}(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V : V \to V)$

endomorfismo di V

Dim $v \in \mathrm{Aut}(\lambda) \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow f(v) - \lambda \, \mathrm{Id}(v) = 0$
$\Leftrightarrow (f - \lambda \, \mathrm{Id})(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{Id}_V)$ $\boxtimes$

da questa osservazione è automatico che $\mathrm{Aut}(\lambda)$ è un sottospazio di V

Sia A una matrice

Oss: $\mathrm{Aut}(\lambda) = \mathrm{Ker}(L(A) - \lambda \underbrace{L(E_n)}_{\mathrm{Id}_{K^n}})$

Dim $v \in \mathrm{Aut}(\lambda) \Leftrightarrow A v = \lambda v \Leftrightarrow L(A) v = \lambda \, \mathrm{Id}_{K^n} v$
$\Leftrightarrow L(A) v - \lambda L(E_n) v = 0 \Leftrightarrow (L(A) - \lambda L(E_n)) v = 0$
$\Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(L(A) - \lambda L(E_n))$ $\square$

altro modo di vedere autospazi:

$$\mathrm{Aut}(\lambda) = \left\{ \text{soluzioni del sistema lineare omogeneo } (A - \lambda E_n)x = 0 \right\}$$

Descriviamo un metodo per trovare gli autovalori

$\boxed{\bullet\ f : V \to V \text{ endomorfismo}}$

λ autovalore di $f \iff \mathrm{Aut}(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \, Id_V) \neq \{0\}$

$\iff f - \lambda \, Id_V$ non è iniettivo

$\iff f - \lambda \, Id_V$ non è biettiva

$\iff \det(f - \lambda \, Id_V) = 0$

Oss:
Gli autovalori di f sono gli zeri della seguente funzione:

$$K \longrightarrow K$$
$$x \longmapsto \det(f - x \, Id_V)$$

Oss $\quad \mathcal{B}$ base di $V \qquad M_{\mathcal{B}}(f) = A$

$$\det(f - x\, Id_V) = \det(M_{\mathcal{B}}(f - x\, Id_V))$$
$$= \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \det(x\, Id_V))$$
$$= \det(A - x E_n)$$

Se $A = (a_{ij})$ definiamo $(b_{ij}) = A - xE_n$

(cioè $b_{ij} = a_{ij} - x\delta_{ij}$)

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

$$\det(A - xE_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}}_{\text{polinomi in } x}$$

$$= \underbrace{(a_{11}-x)(a_{22}-x) \cdots (a_{nn}-x)}_{\sigma = \mathrm{Id}} + \text{polinomi in } x \text{ di grado} \leq n-2$$

(se uno dei $b_{i\sigma(i)}$ non sta sulla diagonale almeno un altro non ci sta)

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots + \alpha_1 x + \det A$$

$\det(A - 0E_n) = \det A$

La somma degli elementi sulla diagonale ha un nome particolare

<u>Def</u> : A matrice $n \times n$

$$\text{traccia}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

la traccia della matrice A

<u>Def</u> Il polinomio $\det(f - x\, Id_V)$ viene chiamato <u>polinomio caratteristico</u> di f ed indicato con $p_f(x)$

<u>Riassumendo</u> : $f: V \to V$ endom, dim $V = n$ e $\mathcal{B}$ base di V

$$p_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} (\text{traccia}\, M_\beta f)\, x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_1 x^1 + \det(M_\beta f)$$

è un polinomio di grado n in x

<u>Proposizione</u> : gli autovalori di f sono esattamente gli zeri di $p_f(x)$

Analogamente si definisce il polinomio caratteristico per una matrice A.

$$P_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id})$$

Valgono proprietà analoghe sui coefficienti e

<u>Proposizioni</u> gli autovalori di A sono esattamente gli zeri di $P_A(x)$

<u>Esempio 1</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

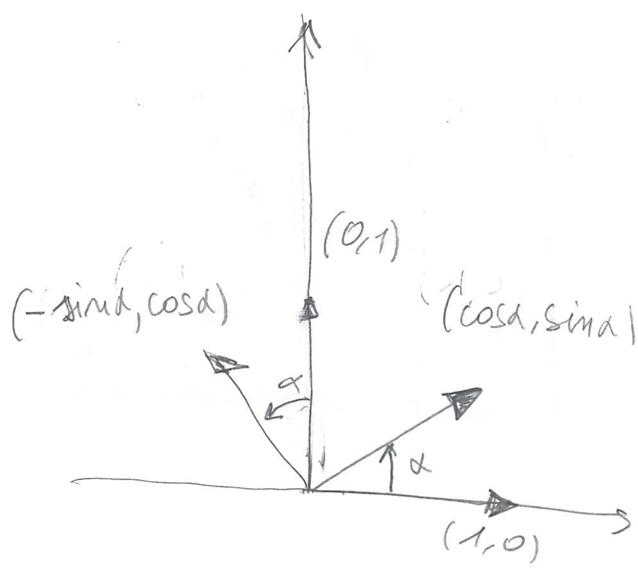
$$P_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = -x(2-x)$$

$\{$autovalori di $A\} = \{2, 0\}$

<u>Esempio 2</u> rotazione attorno all'origine di un angolo α

Matrice rispetto alla base standard:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(x) = \det(R_\alpha - x \cdot E_2) = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\alpha - x)^2 + \sin\alpha$$

$$= x^2 - 2x\cos\alpha + 1$$

risolvo

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1 \leq 0$$

1ª possibilità $\cos^2\alpha - 1 < 0$

$\Rightarrow$ nessuno zero reale di $p(x)$

$\Rightarrow$ nessun autovalore reale

(in nessuna direzione agisce come il prodotto per uno scalare fissato)

2ª possibilità $\cos^2\alpha - 1 = 0$

$\alpha = 0$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è l'identità

$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

l'unico autovalore è 1

$\alpha = \pi$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$p(x) = x^2 + 2x + 1$
$= (x+1)^2$

l'unico autovalore è -1

Se consideriamo R_α nel campo complesso $\mathbb{C}$?

$$P(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$$

$$\frac{\Delta}{4} = \cos^2\alpha - 1$$

$$x_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$= \cos\alpha \pm i\operatorname{sen}\alpha = e^{\pm i\alpha}$$

Autovalori <u>complessi</u> $e^{\pm i\alpha}$

<u>Esempio 3</u>

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(S_\alpha - x\,\mathrm{Id}) = (\cos\alpha - x)(-\cos\alpha - x) - \sin^2\alpha$$

$$= +x^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

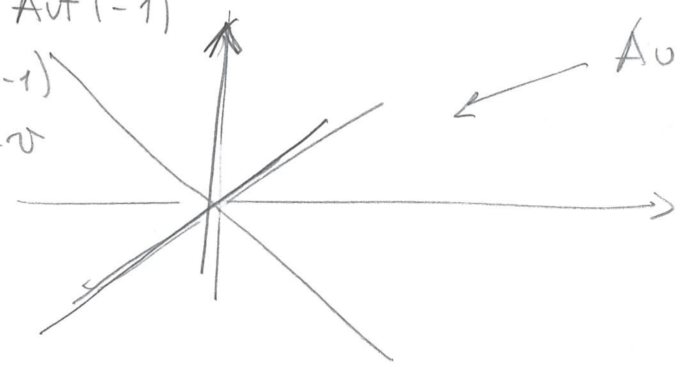
$$= x^2 - 1$$

Autovalori : $\{+1, -1\}$

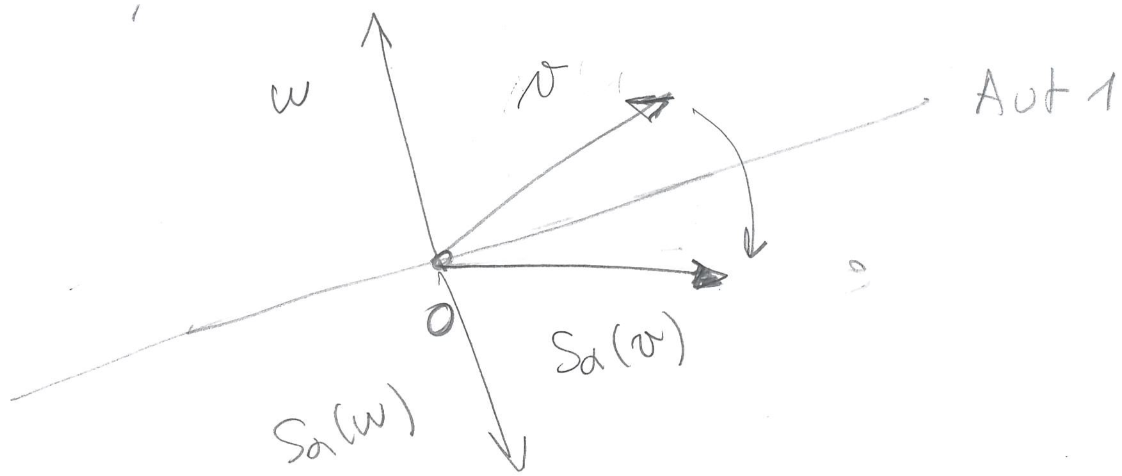
Aut(-1)

$v \in$ Aut(-1)
$f(v) = -v$

Aut(1) $\quad v \in$ Aut(1)
$S_\alpha v = 1$



Con qualche calcolo aggiuntivo si scopre che S_a rappresenta la riflessione di $\mathbb{R}_2$ rispetto ad $\text{Aut}(1)$



<u>Esercizio</u> A, B due matrici simili

$$P_A(x) = P_B(x)$$

<u>Dim</u> A, B simili $\Rightarrow \exists C$ invertibile tale che $A = C^{-1} B C$

$$P_A(x) = \det(A - x E_n) = \det(C^{-1} B C - x C^{-1} E_n C)$$

$$= \det(C^{-1}(B - x E_n) C)$$

$$= \cancel{\det C^{-1}} \det(B - x E_n) \cancel{\det C}$$

$$= \det(B - x E_n) \quad \square$$

<u>Oss</u> Questo implica che matrici simili hanno lo stesso determinante e lo stesso traccia