Prop. $\det({}^tA) = \det(A)$.

Dim. $A = (a_{ij})$ $\quad {}^tA = (a'_{ij})$ con $a'_{ij} = a_{ji}$

$$\det({}^tA) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$ eventualm. prod. in ordine diverso

$$= \det(A)$$ perché σ^{-1} descrive tutto S_n.

formula di Leibniz per le colonne

Calcolo di determinanti.

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \cancel{\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

multilin. nell'i-esima riga $\qquad$ alternante

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

antisimm.

$\Rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, se A è $n \times n$.

Prop. A triangolare sup.: $a_{ij} = 0$ $\forall (i,j)$ con $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$$

Dim. $\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, ma

se $\sigma \neq id$ c'è almeno un fattore nullo, ossia c'è almeno un'inversione.

Per calcolare il det posso operare trasf. elem. sulle matrici.

Es. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4.$

<u>Prop.</u> $\det A = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0 \iff$ le righe di A formano una base di K^n $\iff$ A è invertibile.

<u>Prop.</u> A matrice a blocchi

$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \Rightarrow \det(A) = \det(B)\det(C)$

B, C quadrate

lo si dim. con trasf. elementari, trasformando con l'alg. di Gauss B e C in matrici triangolari sup senza moltiplicare nessuna riga per uno scalare λ, ma operando qualche eventuale scambio di righe: Prima passo da $B \to B'$ triang con k scambi di righe lavorando solo su B poi $C \to C'$ triang., trasf. elem. sulle righe di C, l scambi di righe $A \to \begin{pmatrix} B' & * \\ 0 & C' \end{pmatrix}$ triang. (*)

<u>Teorema di Binet</u>

A, B matrici $n \times n$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$, cioè

$\underset{\text{gruppo gen. lin.}}{\det : GL(n,K)} \longrightarrow K \setminus \{0\}$ gruppo moltiplic.

è un omomorfismo di gruppi.

$SL(n,K) = \ker \det = \{A \in GL(n,K) \mid \det(A) = 1\}$

è un sottogruppo, gruppo lineare speciale.

<u>Dim. del Teorema di Binet.</u>

1° caso: $\det B = 0$: allora le righe di B sono lin. dip. $\Rightarrow$ il sistema lineare $BX = 0$ ha soluz. non nulla $v \neq 0$, $v \in K^n$; allora $Bv = 0$.

Quindi $\underset{(AB)v}{A(Bv)} = A \cdot 0 = 0$: allora anche AB ha $rg < n \Rightarrow \det(AB) = 0$.

(*) $\det A' \overset{\text{triang.}}{=} \det B' \det C' = (-1)^k \det B \, (-1)^l \det C = (-1)^{k+l} \det A \Rightarrow \det A = \det B \det C$.

2° caso: $\det B \neq 0$. Allora consid.

l'appl. $f: M(n\times n, K) \longrightarrow K$ def. da
$$f(A) = \frac{\det(AB)}{\det B}.$$

Vogliamo dim. che $f(A) = \det(A)$. Basta verif. che 1) $f(E_n) = 1$

2) f è multilineare nelle righe di A

3) f è altern. nelle righe di A.

Infatti:

1) $f(E_n) = \dfrac{\det(E_n B)}{\det B} = \dfrac{\det(B)}{\det(B)} = 1$

2) ~~se è una~~ Sia $A = \lambda A' + \mu A''$, dove A' ha tutte le righe uguali ad A, tranne la j-esima a'_j; e analogam. A''; $a_j = \lambda a'_j + \mu a''_j$.
Allora $(AB)_{jk} = a_j \cdot b^k = (\lambda a'_j + \mu a''_j) b^k =$
$= \lambda(a'_j \cdot b^k) + \mu(a''_j \cdot b^k)$; perciò $(AB)_j$, riga j-esima di AB, è comb. lin. di 2 righe. Ma il det è lineare nella j-esima componente $\Rightarrow \det(AB) = \lambda \det(A'B) + \mu \det(A''B) \Rightarrow f(A) = \lambda f(A') + \mu f(A'')$.

3) se A ha 2 righe uguali, anche AB ha 2 righe uguali $\Rightarrow \det(AB) = 0 \Rightarrow f(A) = 0$.

Allora $\det(A) = \dfrac{\det(AB)}{\det(B)}$. ∎

Cor. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Dim. $AA^{-1} = E_n \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = \det(E_n) = 1$.

Prop. Se A, B sono simili, hanno lo stesso det.

Dim. $B = SAS^{-1} \Rightarrow \det B = \det S \det A \det S^{-1}$
$= \det A$.

Conseguenza: posso def. il det di un endomorfismo.

Def. $f: V \to V$ endom., dim $V = n$.

$$\det(f) \stackrel{def.}{=} \det M_{\mathcal{B}}(f), \quad \mathcal{B} \text{ base di } V.$$

Se $\mathcal{B}'$ è un'altra base, $M_{\mathcal{B}'}(f)$ e $M_{\mathcal{B}}(f)$ sono simili, quindi hanno lo stesso det, perciò $\det(f)$ è ben definito.

Oss. f è un automorfismo, ossia isomorfismo di V in sé $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.

Altra dim. del Teorema di Binet.

$$A = (a_{ij}) \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} a_1 b^1 & a_1 b^2 & \cdots & a_1 b^n \\ a_2 b^1 & a_2 b^2 & \cdots & a_2 b^n \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n b^1 & a_n b^2 & \cdots & a_n b^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \cdots & & & \\ & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$ uso la multilinearità:

$$|AB| = \sum_{\sigma\in S_n} \det \begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)}\, b_{\sigma(1)} \\ a_{2\sigma(2)}\, b_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ a_{n\sigma(n)}\, b_{\sigma(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ b_{\sigma(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \det B = |A|\,|B|. \blacksquare$$

Formula di Laplace per un determinante.

$A = (a_{ij})$

Indichiamo
$$A_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & & 0 & & & \\ & & & 0 & & & \\ a_{i1} & & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} & & & & j & & & & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & & a_{1n} \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$
($i \rightarrow$ indicates the row of zeros with 1)

Sostituisco alla riga i-esima e colonna j-esima tutti 0 tranne al posto ij 1

Pongo $\tilde{a}_{ij} = |A_{ji}|$ e $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = {}^t(|A_{ij}|)$

indici scambiati $|A_{ji}|$

matrice complementare di A (o aggiunta)

Teorema $\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)E_n$.

Cor. Se $\det A \neq 0$, si ha $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Esempio

$n=2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{a}_{11} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}_{A_{11}} = a_{22}$, $\tilde{a}_{22} = a_{11}$,

$\tilde{a}_{\cancel{21}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{21}$, $\tilde{a}_{21} = -a_{\cancel{21}}$; $\tilde{a}_{12} = -a_{12}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{\cancel{12}} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$n = 3$

Dim. del Teorema

$$A_{kj} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow k$$

$\uparrow j$

sostituisco alla I riga, la prima $+ a_{1j}\cdot$ (k-esima); alla 2^a la seconda $+ a_{2j}$ (k-esima) ecc.

e poi trasf. analoghe sulle colonne: det non cambia

Lemma

$\det(A_{kj}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow k$

sulle righe

$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{k1} & & 1 & & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

sulle colonne

ho queste due espressioni per $|A_{kj}| = \tilde{a}_{jk}$.

Ora considero $A\tilde{A} = (b_{ik})$

$$b_{ik} = \sum_j a_{ij}\,\tilde a_{jk} = \sum_j a_{ij}\,|A_{kj}| = \text{lemma per le righe}$$

$$= \sum_j a_{ij} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \cancel{\sum_j \det}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \sum_j a_{ij} e_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \to = a_i \quad = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_i \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ \det(A) & \text{se } i = k \end{cases}$$

Quindi $A\tilde A = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \det A & \\ 0 & & \ddots\ \det A \end{pmatrix} = \det(A)\, E_n$.

Per $\tilde A A$ si lavora sulle colonne in modo analogo.

<u>Def</u>. A $n \times n$

$A'_{ij} :=$ sottomatrice di A $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta cancellando riga i-esima e colonna j-esima
$=$ minore complementare di a_{ij}

<u>Lemma</u> $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(A'_{ij})$

$$A_{ij} \xrightarrow[\substack{\text{di righe,} \\ j-1 \text{ scambi} \\ \text{di colonne}}]{i-1 \text{ scambi}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$: ha det uguale a $|A'_{ij}|$ perché a blocchi

$\Rightarrow$ $\det A_{ij}$ ha la forma voluta. ■

Teorema: formula di Laplace, sviluppo di Laplace

$A = (a_{ij})$ $n \times n$

Allora:

1) Sia $i \in \{1, \dots, n\}$ un indice di riga fissato:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij})$$

"sviluppo secondo la i-esima riga"

2) Sia j un indice di colonna

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij})$$

"sviluppo secondo la j-esima colonna"

Dim. $A\tilde{A} = (b_{ij})_{ij} = \det(A) E_n = \det(A)(\delta_{ij})_{ij}$.

Allora $\forall i$: $\cancel{b_{ij} = \det(A)\delta_{ij} = \sum a_{ij} \tilde{a}_{ji}}$

$$b_{ii} = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ji} = \sum_j a_{ij} |A_{ij}| \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} |A'_{ij}|.$$

Se si considera $\tilde{A}A$ all'inizio si trova l'altra espressione, sulle colonne.

Esempio

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

sviluppo secondo la terza riga

$= -3 + 6 = 3$

oppure

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{1^a \text{ colonna}}{=} -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 6 - 3 = 3.$

usando l'algoritmo di Gauss:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

— . —

Quanto visto si applica alla risoluzione dei sistemi lineari quadrati con matrice dei coefficienti non singolare (= di rango massimo), per cui c'è una e una sola soluzione.

<u>Teorema</u> - regola di Cramer.

Sia A una matrice invertibile $n \times n$, $b \in K^n$.

Il sistema lineare $Ax = b$ ha l'unica soluzione data da

$$x_j := \frac{\operatorname{Det}(a^1 \dots a^{j-1}\, b\, a^{j+1} \dots a_n)}{\det(A)} \quad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

<u>Oss.</u> La soluzione x è $x = A^{-1} b$.

Dim.

$$Ax = b \iff x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b$$

In tal caso $\mathrm{Det}(a^1, \dots, a^{j-1}, b, a^{j+1}, \dots, a^n) =$

$$= \mathrm{Det}(a^1, \dots, a^{j-1}, x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n, a^{j+1}, \dots, a^n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{Det}(a^1 \dots a^{j-1}\, a^i\, a^{j+1} \dots a^n) = \underbrace{x_j \cdot \mathrm{Det}(a^1 \dots a^j \dots a^n)}_{\text{alternanza del Det}} =$$

$$= x_j \cdot \det(A)$$

$\Longrightarrow$ ricavo x_j dividendo per $\det(A)$ che è $\neq 0$.

Applicazione del determinante al volume dei parallelepipedi multidimensionali.

Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$,

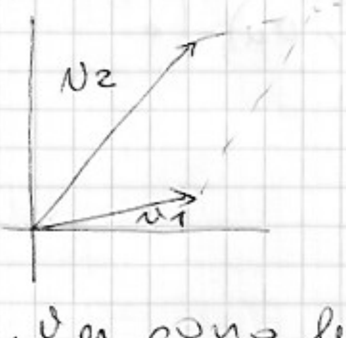
$$P(v_1, \dots, v_n) \overset{def}{=} \{ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid 0 \le \lambda_i \le 1,\ i = 1, \dots, n \} \subset \mathbb{R}^n$$

parallel. generato da $v_1, \dots, v_n$

Esempio $n = 1$ $\quad P(v_1) = \{ \lambda_1 v_1 \mid 0 \le \lambda_1 \le 1 \}$

è il segmento

$n = 2$

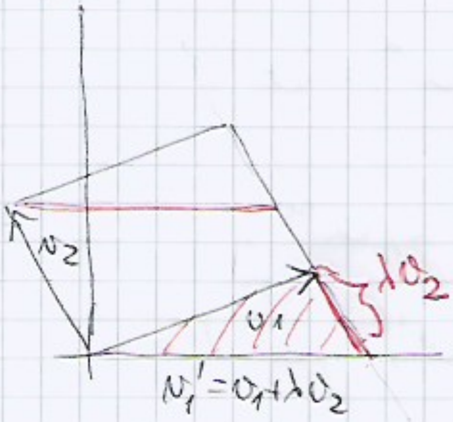


$P(v_1, v_2) =$ parallelogramma $= \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid 0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1 \}$

Se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dip. il parallelogramma è degenere.

Si ha che l'area di $P(v_1, v_2) = |\mathrm{Det}(v_1, v_2)|$.

Dim. Area è (base)·(altezza).

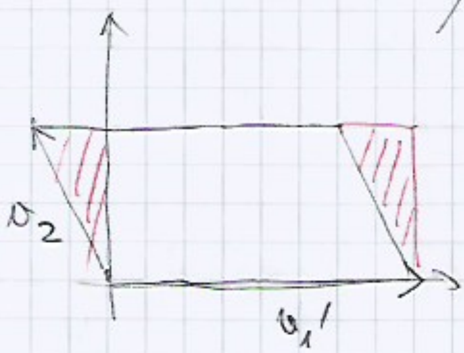


Modifico v_1, v_2 senza cambiare l'area, in modo da trovare un rettangolo

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 + \lambda v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Questa è una trasf. elem., non cambia il det; il parall. non cambia area perché non cambia l'altezza perpendicolare a v_2

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 + \mu v_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$$



$P(v_1', v_2')$ è un rettangolo

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = |ab|$$

"volume" del rettangolo

Si def. Volume del parallelepipedo $P(v_1, \dots, v_n) = |\mathrm{Det}(v_1, \dots, v_n)|$.