$\mathbb{A}$ spazio affine di dimensione n

$S \subset \mathbb{A}$ si dice <u>SOTTOSPAZIO AFFINE</u> di $\mathbb{A}$ se $S \neq \emptyset$ e se esiste $W \subset V$ sottospazio vettoriale tale che, fissato $P \in S$ si ha $S = \{P + w \mid w \in W\}$

W è detta la <u>GIACITURA</u> di S, e $\dim(S) \overset{\text{def}}{=} \dim(W)$

- Se $S = \{P + w \mid w \in W\}$ con P, W come sopra, e se $Q \in S$, allora $S = \{Q + w \mid w \in W\}$. Cioè: S <u>non individua univocamente</u> il punto P per cui $S = \{P + w \mid w \in W\}$

<u>Dim.</u>
Se $Q \in S$ come abbiamo supposto, allora esiste $w_0 \in W$ tale che $Q = P + w_0$.
Sia $w \in W$ qualsiasi. Allora $Q + w = (P + w_0) + w = P + \overbrace{(w_0 + w)}^{\in W}$ dunque $Q + w \in S$. Questo $\forall w \in W$, e quindi <u>$\{Q + w \mid w \in W\} \subset S$</u>.
Viceversa, sia $P + w' \in S$ arbitrario; dunque $w' \in W$.
Ma, allora $w' - w_0 \in W$ e si ha

$$Q + (w' - w_0) = (P + w_0) + (w' + w_0) = P + (\cancel{w_0} + w' - \cancel{w_0}) = P + w'$$

Quindi <u>$S \subset \{Q + w \mid w \in W\}$</u>.
Le due inclusioni sottolineate sono una l'inversa dell'altra, e si conclude $S = \{Q + w \mid w \in W\}$.

- S individua <u>univocamente</u> la sua giacitura.

Sia $P \in S$; supponiamo che esistano due sottospazi vettoriali di V, siano W e W', tali che
$\underbrace{\{P + w \mid w \in W\} = \{P + w' \mid w' \in W'\}}$. Allora <u>$W = W'$</u>

Possiamo scrivere questo perché, per il punto precedente, possiamo usare un qualsiasi punto di S per scrivere S nella forma "$\{P + w \mid w \in W\}$". Qui usiamo lo stesso P

con ciascuna delle presente giaciture.

Sia $w \in W$ arbitrario. Allora $P+w \in \{P+w' \mid w' \in W'\}$
Dunque esiste un $w'_0 \in W'$ tale che $P+w = P+w'_0$.
Ma, per la proprietà 3) di α (in particolare: α è iniettiva cioè $\alpha(P,-): V \longrightarrow A$ è iniettiva) da $P+w = P+w'_0$
segue $w = w'_0$. Quindi $w \in W'$. Questo vale $\forall w \in W$.
Pertanto $\underline{W \subset W'}$.

Sia $w' \in W'$ arbitrario. Allora $P+w' \in \{P+w \mid w \in W\}$
Dunque esiste $w_0 \in W$ opportuno tale che $P+w' = P+w_0$.
...... $\underline{W' \subset W}$.

In conclusione: $\underline{\underline{W = W'}}$.

COORDINATE AFFINI

A spazio affine di dimensione n.
Si vogliono introdurre coordinate in A, cioè un metodo che permetta di rappresentare ogni elemento di A (punto) mediante un' n-pla ordinata di scalari.

Fissato comunque un punto $O \in A$ si ha che
$\alpha(O,-): V \longrightarrow A$ è biettiva.
Fissata comunque una base ordinata $\mathcal{B} = (v_1, -, v_n)$ di V, si ha che $K_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è biettiva.

Def. Un <u>sistema di coordinate affini</u> in A^n è formato da un punto $O \in A$, detto l'<u>ORIGINE</u> del sistema di coordinate, e da una base ordinata $\mathcal{B}$ di V.

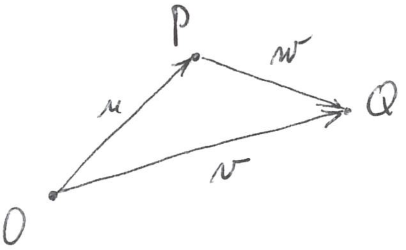
29/11/17 C

Fissati O e $\mathcal{B}$:

Sia $P \in \mathcal{A}$ arbitrario. Allora esiste ed è unico $u \in V$ tale che $P = O + u$.

Sia $u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Allora

$P \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ $P(x_1, \dots, x_n)$



$v = y_1 v_1 + \dots + y_1 v_n$ $\qquad$ $Q(y_1, \dots, y_n)$

$w \in V$ è l'unico vettore di V tale che

$$\underset{O+v}{\overset{\parallel}{Q}} = P + w = (O + u) + w = O + (u + w)$$

Dunque $v = u + w \implies w = v - u \implies$

$$w = (y_1 - x_1) v_1 + \dots + (y_n - x_n) v_n$$

Cioè da $P(x_1, \dots, x_n)$, $Q(y_1, \dots, y_n)$ si ricava subito che

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{vmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{vmatrix}$$