LEZIONE 41 4/12/17 1

$\mathbb{A}^n$ spazio affine di dimensione n

Un sistema di coordinate affini in $\mathbb{A}^n$ è dato da $O \in \mathbb{A}$ l'origine del sistema di coordinate e $\mathcal{B}$, base ordinata di V.

$\alpha(O, -) : V \longrightarrow \mathbb{A}^n$ è biettiva, e permette di identificare $\mathbb{A}^n$ con V. A sua volta, $\mathcal{B}$ permette di identificare V con $\mathbb{R}^n$ $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$. In dettaglio:

per ogni $P \in \mathbb{A}^n$ esiste, unico $u \in V$ t.c. $P = O + u$

$u = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.

$(x_1, \dots, x_n)$ sono le coordinate affini di P risp. al sistema $(O, \mathcal{B})$ $P(x_1, \dots, x_n)$

Abbiamo visto che:

- Le soluzioni di un SL $AX = B$ A $m \times n$ compatibile sono un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n = \mathbb{A}^n$
- Un caso particolare è quando $A = [a_1 \dots a_n]$ con $rg(A) = 1$. In tal caso l'insieme di tutte le soluzioni dell'unica equazione $AX = b$ ha dimensione $n-1$ (come sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$). È detto iperpiano di $\mathbb{A}^n$, ed indicato con H.

PROPOSIZIONE

Sia $S \subset \mathbb{A}^n$ un sottospazio affine di dimensione d. Allora esiste un SL compatibile, formato da $n-d$ equazioni, il cui insieme delle soluzioni è esattamente S. Le equazioni di tale SL si chiamano un sistema di equazioni cartesiane per S. "Un" perché le equazioni cartesiane non sono mai uniche.

Dim.

S sia determinato mediante

- un suo punto $P_0(\pi_1, \dots, \pi_n)$
- una base $u_1, \dots, u_d$ della giacitura $W \subset V$ di S.

L'iperpiano generale in $\mathbb{A}^n$ ha equazione

$$H \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \qquad rg[a_1 \dots a_n] = 1$$

L'idea per costruire un SL come desiderato è la seguente: le equazioni del SL saranno le equaz. di opportuni iperpiani di $\mathbb{A}^n$. Quali?

Se $S \subset H$ allora ogni punto di S appartiene ad H. In particolare, H deve contenere: $\boxed{P_0 \in H \text{ e } T(S) \subset T(H)}$

$$P_0 \quad P_1 \overset{def}{=} P_0 + u_1 \quad \dots \quad P_0 + u_d \overset{def}{=} P_d \qquad P_0, P_1, \dots, P_d \in S$$

Impongo la condizione che H contenga P_0:

$a_1 \pi_1 + \dots + a_n \pi_n = b$ deve essere soddisfatta. Cioè deve aversi $\boxed{b = a_1 \pi_1 + \dots + a_n \pi_n}$. Allora l'equaz. che cerchiamo è del tipo:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = a_1 \pi_1 + \dots + a_n \pi_n \iff$$

$$a_1(x_1 - \pi_1) + \dots + a_n(x_n - \pi_n) = 0 \qquad (*)$$

Adesso devo imporre a questa equazione di essere soddisfatta dalle coordinate di $P_1, P_2, \dots, P_d$.

Sia $u_1 = \alpha_{11} v_1 + \dots + \alpha_{1n} v_n$. Allora

$P_1 = P_0 + u_1$ ha coordinate $(\alpha_{11} + \pi_1, \dots, \alpha_{1n} + \pi_n)$

Quando sostituisco tali coordinate nella $(*)$

trovo, chiaramente:

$$a_1 \alpha_{11} + \dots + a_n \alpha_{1n} = 0$$

e analogamente per gli altri punti $P_2, \dots, P_n$.

Quindi ho il SL nelle incognite $a_1, \dots, a_n$

$$(H) \begin{cases} \alpha_{11} a_1 + \dots + \alpha_{1n} a_n = 0 \\ \alpha_{21} a_1 + \dots + \alpha_{2n} a_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{d1} a_1 + \dots + \alpha_{dn} a_n = 0 \end{cases}$$

$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{d1} & \dots & \alpha_{dn} \end{bmatrix} = d$ perché $u_1, \dots, u_d$ sono lin. indip.

Quindi si hanno $n-d$ parametri liberi. Si può vedere chi sono applicando l'alg. di eliminazione di Gauss a (H).
Per non complicare le notazioni supponiamo siano

$a_1, \dots, a_{n-d}$

	INDETERMINATE							
	PARAMETRI LIBERI							
	a_1	a_2		a_{n-d}	a_{n-d+1}	—	a_n	
PONGO	1	0	0 —	0	↑	↑	↑	determino questi e trovo la prima equaz.
PONGO	0	1	0 —	0	↑	↑	↑	determino questi e trovo la 2ª equaz.
⋮		—						
PONGO	0	0	0 —	0 1	↑	↑	↑	determino questi e trovo la $(n-d)$-esima equaz.

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - \pi_1) + \dots + a_{1n}(x_n - \pi_n) = 0 \\ a_{21}(x_1 - \pi_1) + \dots + a_{2n}(x_n - \pi_n) = 0 \\ \vdots \\ a_{n-d,1}(x_1 - \pi_1) + \dots + a_{n-d,n}(x_n - \pi_n) = 0 \end{cases}$$

Adesso tutti gli a_{ij} sono ben determinati.

~~Posso essere più preciso.~~ Pongo

$\cancel{b_h = a_{h1}\pi_1 + \dots + a_{hn}\pi_n}$. $\forall h = 1, \dots, n-d$.

4/12/17 (4

Allora il SL trovato è

$$(\#)\quad\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad + a_{1,n-d+1}x_{n-d+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad x_2 \qquad\qquad + a_{2,n-d+1}x_{n-d+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \\ \qquad\qquad x_{n-d} + a_{n-d,n-d+1}x_{n-d+1} + \dots + a_{n-d,n}x_n = b_{n-d} \end{cases}$$

Chiaramente, il rango della matrice dei coeff. è $n-d$, dunque il SL è compatibile per RC. (= Rouché-Capelli). Sia $S' \subset \mathbb{A}^n$ l'insieme di tutte le sue soluzioni.

$$\boxed{b_h \overset{def}{=} \pi_h + a_{h,n-d+1}\pi_{n-d+1} + \dots + a_{h,n}\pi_n} \quad (\mathcal{U}) \quad \text{SPIEGARE}$$

Per le $(\mathcal{U})$ si ha che $P_0 \in S'$

Sappiamo che S' è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$. Lo spazio W' (sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$) di tutte le soluzioni del SLO associato a (#) ha dimensione

$n-(n-d) = d.$

Per costruzione di (#), ciascuno dei vettori $u_1, \dots, u_d$ (scritto in componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$) è una soluzione del SLO associato a (#). Dunque $W' = W$ ed S è formato da tutte e sole le soluzioni di (#).

Le equazioni di (#) sono un sistema di equazioni cartesiane per S.

Che le equazioni cartesiane <u>non siano uniche</u> lo possiamo vedere facilmente con degli esempi. Uno, facilissimo, è questo $S = \{(3,7)\} \subset \mathbb{A}^2$.

Allora equazioni cartesiane per S sono   4/12/17   5

$$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-y=-4 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=16 \end{cases} \quad \text{oppure} \ \dots$$

ESEMPIO (per capire meglio la dimostrazione)

$S \subset \mathbb{A}^3$ sia la retta affine passante per il punto $P_0(-2,3,1)$, e la cui direzione è generata da $u=\begin{vmatrix}2\\3\\5\end{vmatrix}$

$$P_1 = \underbrace{(-2,3,1)}_{\in \mathbb{A}^3} + \underbrace{\begin{vmatrix}2\\3\\5\end{vmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3 = V} = (0,6,6)$$

L'equazione del generico piano in $\mathbb{A}^3$ è

$$ax+by+cz=d \qquad (a,b,c)\neq(0,0,0) \iff rg([a\ b\ c])=1$$

Impongo il passaggio per P_0:

$a(-2)+b\cdot 3+c\cdot 1=d \Rightarrow d=-2a+3b+c$ quindi

$$ax+by+cz=-2a+3b+c \iff \underbrace{a(x+2)+b(y-3)+c(z-1)=0}_{\text{è la } (\star)}$$

Impongo il passaggio per P_1; per questo devo sostituire le coordinate di P_1 in $(\star)$:

$$a(0+2)+b(6-3)+c(6-1)=0 \Longrightarrow \boxed{2a+3b+5c=0}$$

Per ritrovare questa nella dim. devo ragionare in modo un po' diverso:

$(\star)$ è $a(x-\underbrace{(-2)}_{\pi_1})+b(y-\underbrace{3}_{\pi_2})+c(z-\underbrace{1}_{\pi_3})=0$

$P_2=(\pi_1+2,\ \pi_2+3,\ \pi_3+5)$ sosti. queste coord. in

$$a(\pi_1+2-\pi_1)+b(\pi_2+3-\pi_2)+c(\pi_3+5-\pi_3)=0 \Longrightarrow$$

Quindi $2a+3b+5c=0$ è la prima (ed unica in questo esempio) equazione delle (4).

Posso scegliere a, b come parametri liberi, e determinare c in loro funzione:

$c = -\frac{2}{5}a - \frac{3}{5}b$

a	b	c	
1	0	$-\frac{2}{5}$	$\Longrightarrow \boxed{1}$
0	1	$-\frac{3}{5}$	$\Longrightarrow \boxed{2}$

$\boxed{1}$ $1\cdot(x+2)+0(y-3)-\frac{2}{5}(z-1)=0 \ /\cdot 5$ $\qquad 5x+10-2z+2=0$

$0\cdot(x+2)+1(y-3)-\frac{3}{5}(z-1)=0 \ /\cdot 5$ $\qquad 5y-15-3z+3=0$

$\begin{cases} 5x \quad -2z=-12 \\ \quad 5y-3z=12 \end{cases}$ equazioni cartesiane per la retta S.

Verifichiamolo! P_0 è soluzione di

$5(-2)-2(1)=-12$ OK $\qquad 5\cdot(3)-3\cdot 1=12$ OK

Il SLO associato a (quello che mi dà la giacitura dello spazio delle soluzioni) è

$\begin{cases} 5x \quad -2z=0 \\ \quad 5y-3z=0 \end{cases}$ $\qquad rg\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}=2$

Quindi la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ formato da tutte le soluzioni di è $3-2=1$.

Si verifica subito che il vettore u genera tale sottospazio vettoriale. Tutto OK, dunque.

(CONTINUAZIONE DELL') ESEMPIO (PRECEDENTE)

$B \subset A^3$ sia il piano passante per $P_0(-2,3,1)$, la cui giacitura è generata da $u_1=\begin{vmatrix}2\\3\\5\end{vmatrix}$ e $u_2\begin{vmatrix}1\\1\\4\end{vmatrix}$.

L'equazione del generico piano per P_0 è

$ax+by+cz=-2a+3b+c$

La direzione di tale piano è data da:

(1) $ax + by + cz = 0 \qquad rg[a\ b\ c] = 1$

Voglio determinare a, b, c in $\mathbb{R}$ in modo che lo spazio delle soluzioni di tale SLO sia quello che ha per base u_1, u_2.

u_1 è soluzione di (1) $\Leftrightarrow a \cdot 2 + b \cdot 3 \cdot c \cdot 5 = 0$

$2a + 3b + 5c = 0$

u_2 è soluzione di (1) $\Longleftrightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + 4 \cdot c = 0$

$a + b + 4c = 0$

$$\begin{cases} 2a + 3b + 5c = 0 \\ a + b + 4c = 0 \end{cases}$$ Questo è (4)

$\det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow$ possiamo scegliere "a" come parametro libero.

$a = 1 \qquad \begin{cases} b + 4c = -1 \\ 3b + 5c = -2 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$a = 1 \quad b = -\frac{3}{7} \quad c = -\frac{1}{7}$ è lo stesso se prendiamo

$a = 7 \quad b = -3 \quad c = -1 \Rightarrow d = -2a + 3b + c = -14 - 9 - 1 = -24$

Il piano ~~.....~~ B ha equazione cartesiana

$$\boxed{7x - 3y - z = -24}$$

Def $S \parallel S' \Leftrightarrow T(S) \subset T(S')$ oppure $T(S') \subset T(S)$ 4/12/17

Le equazioni cartesiane di piani e rette permettono di studiare le "reciproche posizioni" utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli ("RC"): un sistema lineare $AX = D$ è compatibile $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A|D)$.

POSIZIONE RECIPROCA DI DUE PIANI IN $\mathbb{A}^3$

$S, S' \subset \mathbb{A}^3$ siano piani di equazione cartesiana

$ax + by + cz = d$ e $a'x + b'y + c'z = d'$ rispettivamente

$S \cap S' = ?$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d' \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d \\ d' \end{bmatrix}$$

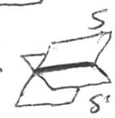
$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right]$ la matrice completa. Valgono le relazioni

$1 \le rg(A) \le rg(A|D) \le 2$ $\qquad rg(A|D) \le rg(A) + 1 \quad (1)$

SPIEG. SPIEG.

W: lo spaz. vett. delle soluz. del SLO $AX = 0$

$rg(A)$	$rg(A\|D)$	$\dim(W) = 3 - rg(A)$	$S \cap S'$
1	1	2	$S = S'$
1	2	2	$S \cap S' = \emptyset$ $\quad T(S) = T(S')$
2	2	1	$S \cap S' \ne \emptyset$ ed è una retta.



POSIZIONE RECIPROCA DI TRE PIANI IN $\mathbb{A}^3$

Ad S, S' come sopra (con la stessa equazione), aggiungiamo S'' di equazione $a''x + b''y + c''z = d''$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right]$$
$\qquad A \qquad\qquad D$

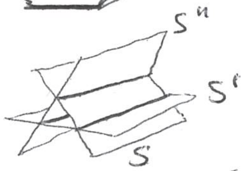
Valgono

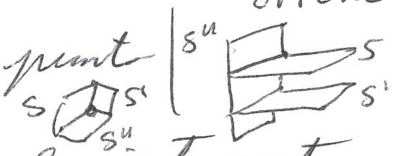
$1 \le rg(A) \le rg(A|D) \le 3$

$rg(A|D) \le rg(A) + 1$

$rg(A)$	$rg(A\|D)$	$\dim(W)$	$S\cap S'\cap S''$
1	1	2	$S=S'=S''$
1	2	2	$S\cap S'\cap S''=\emptyset$
2	2	1	$S\cap S'\cap S''$ è una retta
2	3	1	$S\cap S'\cap S''=\emptyset$ SPIEGARE in dettaglio
3	3	0	$S\cap S'\cap S''$ è un punto





OPPURE


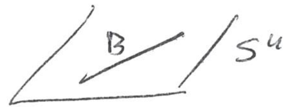
questa parte della tabella si può anche interpretare come relativa alla

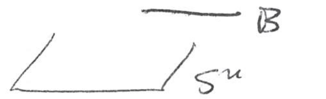
POSIZIONE RECIPROCA di UN PIANO ed UNA RETTA in $\mathbb{A}^3$

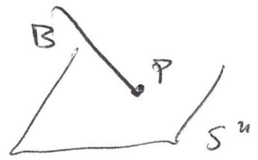
Suppongo $rg\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2 = rg\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right]$

Allora $B=S\cap S'$ è una retta in $\mathbb{A}^3$ e le ultime tre righe della tabella danno $B\cap S''$.

$rg(A)$	$rg(A\|D)$	$B\cap S''$
2	2	$B\subset S''$
2	3	$B\parallel S''$ e $B\cap S''=\emptyset$
3	3	$B\cap S''$ è un punto







POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE IN $\mathbb{A}^3$

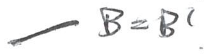
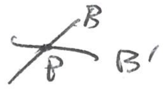
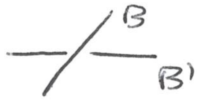
$B, B' < \mathbb{A}^3$ siano due rette $B=S\cap S'$ $B'=S''\cap S'''$ dove S, S', S'', S''' sono piani

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right] = (A|D)$$

SPIEG.

$2 \le rg(A) \le rg(A|D) \le 4$

$rg(A|D) \le rg(A)+1$

$rg(A)$	$rg(A\|D)$	$\dim(W)$	$B \cap B'$
2	2	1	$B = B'$ $\quad B \parallel B'$ 
2	3	1	$B \cap B' = \emptyset$ $\quad B \parallel B'$ 
3	3	0	$B \cap B'$ è un punto 
3	4	0	$B \cap B' = \emptyset$ B, B' non sono parallele 

In questo caso B, B' si dicono <u>R. SGHEMBE</u> tra loro.