LEZIONE 42

5/12/17

Ancora a proposito dell'esercizio di ieri.

Il pensare (prima di buttarsi a farlo!!!) alla situazione geometrica (e pensarci in modo geometrico) permette di capire che cosa sta succedendo esattamente, e di risparmiare tempo e fatica coi conti.

Partiamo dal risultato voluto:

"Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le rette r_a ed s sono contenute nello stesso piano di $\mathbb{A}^3$?"

Ora:

due rette (distinte) r, s sono contenute nello stesso piano $\iff$ o $r \parallel s$ o $r \cap s = \{P\}$

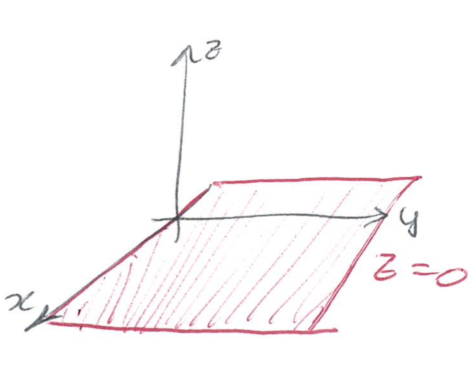
Dalle equazioni di r_a osserviamo che tutte le rette r_a hanno la stessa direzione, generata dal vettore

$$w = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad T(s) = \left\{ \lambda \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

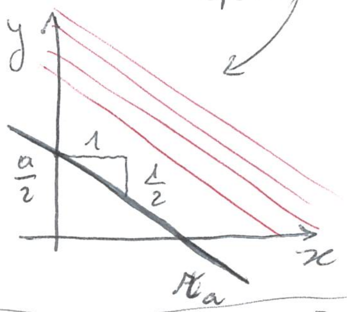
Dunque r_a ed s non sono ~~mai~~ $\forall a \in \mathbb{R}$ parallele

Quindi dobbiamo cercare se qualche r_a interseca s. Bisogna capire meglio come sono fatte le rette r_a.

$$r_a \begin{cases} x + 2y = a \\ z = 0 \end{cases} \leftarrow \text{è fisso}$$



queste sono proprio le varie rette r_a



$x+2y=a \iff y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$

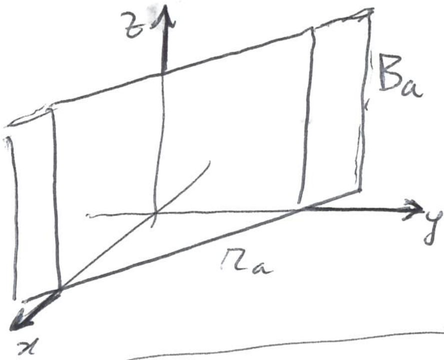
al variare di a ho un fascio improprio di rette nel piano xy.

Sia $B_a \subset \mathbb{A}^3$ il <u>piano</u> di equazione $x+2y=a$

$T(B_a)$ è def. dal SLO $x+2y=0$, associato a ↑

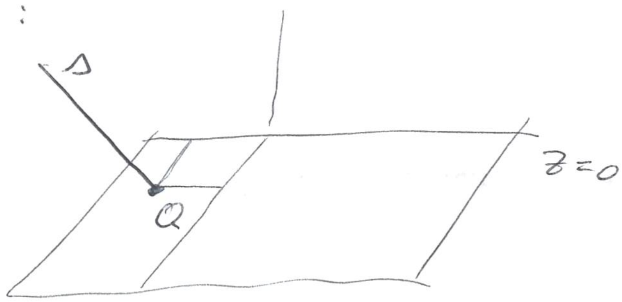
Una soluzione è e_3.

Dunque B_a è parallelo all'asse z, e passa per la retta r_a.



COMMENTARE ↑

A questo punto basta vedere se la retta s interseca il piano $z=0$:



$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+z=1 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{array}$$

$Q=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$

$\frac{1}{2}+2\left(-\frac{1}{2}\right)=a \qquad \boxed{a=-\frac{1}{2}}$

ESERCIZIO (Prova scritta del 27/6/17)

Si determini se nello spazio affine $\mathbb{A}^3$, dotato di coordinate O, x, y, z, esiste o meno una retta u, passante per il punto $P(0,5,1)$, ed incidente entrambe le rette

$$r \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+2t \\ z = -1-t \end{cases} \qquad e \qquad s \begin{cases} x+y+z = 4 \\ x-y+5z = 2 \end{cases}$$

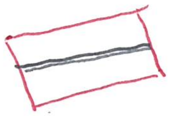
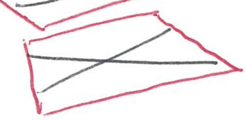
Lettura del testo

- "esiste o meno" è un aiuto implicito. Significa: "state in campana, potrebbe benissimo non esserci". COMMENTARE
- "u è incidente r" significa $u \cap r \neq \emptyset$
  Analogamente deve essere $u \cap s \neq \emptyset$

Comprendere la situazione geometrica

a) Qual'è la posizione reciproca delle rette r, s?

In generale due rette possono

- essere uguali 
- altrimenti
  - essere parallele 
  - essere incidenti 
  - non sono né incidenti, né parallele
    In particolare: non sono complanari, cioè entrambe contenute in un dato piano.
    Si dice che le due rette sono SGHEMBE

Controlliamo se ci è sfuggito qualche caso, usando il Teorema di Rouché-Capelli. Supponiamo per questo che entrambe le rette siano date mediante equazioni cartesiane (questo non accade nell'esercizio).

$r \begin{cases} ax+by+cz=d & S \\ a'x+b'y+c'z=d' & S' \end{cases}$ $rg\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}=2$ (✱) COMMENTARE

$\Rightarrow rg[a\ b\ c]=1$

$s \begin{cases} a''x+b''y+c''z=d'' & S'' \\ a'''x+b'''y+c'''z=d''' & S''' \end{cases}$ $rg\begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{bmatrix}=2$

$$\underbrace{\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{matrix}}_{A}\ \Bigg|\ \underbrace{\begin{matrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{matrix}}_{D}$$

$2 \le rg(A) \le rg(A|D) \le 4$

$rg(A|D) \le rg(A)+1$

$rg(A)$	$rg(A\|D)$	
2	2	1
2	3	2
3	3	3
3	4	4

Sono 4 casi, come quelli che abbiamo trovato prima. Non ci è sfuggito niente!

Le quattro equazioni (due per r e due per s) rappresentano quattro piani S, S', S'', S'''. Dunque $r = S \cap S'$ e $s = S'' \cap S'''$.

1 Mi dice che l'equazione di S'' è comb. lineare delle equazioni di S ed S' (che so essere lin. indip. per (✱)). Dunque $r \subset S''$. Analogamente $r \subset S'''$. Ma allora

$$r \subset S'' \cap S''' = s \quad \text{dunque } \underline{r = s}$$

2 Il teorema RC mi dice che $r \cap s = \emptyset$.

Se W indica, come al solito, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ formato da tutte le soluzioni del SLO $AX=\underline{0}$ associato, allora

$$\dim(W) = 3 - rg(A) = 3-2 = 1 \quad \text{nel nostro caso.}$$

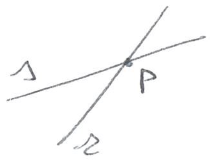
Questo significa che $W = T(r) = T(s)$.
Quindi $\underline{r \parallel s}$.

3 Il teorema di Rouché-Capelli ci dice che $r \cap s \neq \emptyset$.
$\dim(W) = 0 \Rightarrow W = \{0\}$. Approfondiamo

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ le soluzioni di questo SLO formano $T(r)$

$$\begin{bmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ le soluzioni formano $T(s)$

Allora $W = T(r) \cap T(s)$. Quindi da $W = \{0\}$ segue
$T(r) \neq T(s)$ (dunque r, s non sono parallele)



r, s sono incidenti

4 $r \cap s = \emptyset$ per RC ed r, s non sono parallele.
Dunque r, s sono sghembe.

Torniamo all'esercizio.

$T(r)$ è generato da $\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \stackrel{def}{=} v$

Trovo $T(s)$ $\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

Pongo $z = 1$ (COMMENTARE!) $\Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -3$

$T(s)$ è generato da $\begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ oppure da $\begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \stackrel{def}{=} v'$

Dunque $\underline{T(r) \neq T(s)}$

Verifichiamo se r ed s sono incidenti o meno, cioè se $r \cap s \neq \emptyset$, oppure $r \cap s = \emptyset$.

$$\begin{cases} (2+3t)+(1+2t)+(-1-t)=4 \\ (2+3t)-(1+2t)+5(-1-t)=2 \end{cases}$$

SPIEG.

$$\begin{cases} 4t=2 \\ -4t=6 \end{cases} \quad \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

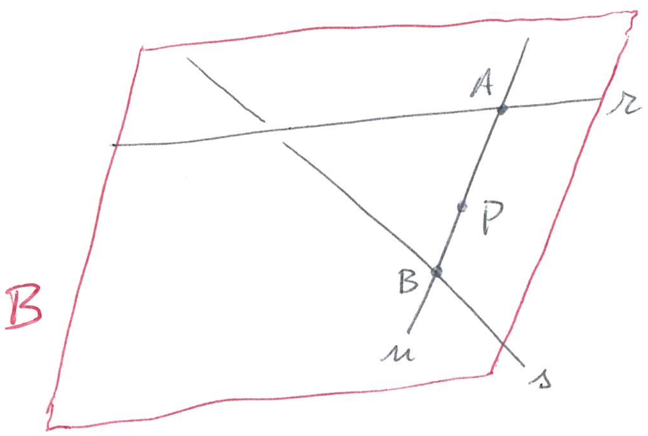
assurdo. Dunque $r \cap s = \emptyset$ e r, s sono due rette sghembe.

b) Qual'è la posizione di P rispetto ad r, s?

Sostituendo le coordinate di P nelle equazioni di s si vede che $P \notin s$. Per quanto riguarda r:

$$\begin{cases} 0=2+3t \\ 5=1+2t \\ 1=-1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-2 \end{cases}$$

assurdo, dunque $P \notin r$



COMMENTARE

Supponiamo esista una retta u come richiesto dal problema.

C'è un unico piano, sia B, passante per r e per P. Questo perché $P \notin r$.

La retta u è contenuta in B $u \subset B$ spiegare.

Analogamente, c'è un unico piano, sia B', passante per s e per P. Si ha $u \subset B'$

Allora $u \subset B \cap B'$ Se $B \neq B'$, allora $u = B \cap B'$

Ma se fosse $B = B'$ allora le rette r, s sarebbero complanari in quanto contenute in tale piano. Assurdo.

Dunque abbiamo un metodo per costruire la retta u.

Costruisco B':

Il generico piano passante per s ha equazione

$$\lambda(x+y+z-4) + \mu(x-y+5z-2) = 0 \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0)$$

Impongo il passaggio per $P(0,5,1)$

$$\lambda(0+5+1-4) + \mu(0-5+5\cdot 1-2) = 0 \qquad 2\lambda - 2\mu = 0 \qquad \lambda = \mu = 1$$

B' ha equazione cartesiana

$$x + \cancel{y} + z - 4 + x - \cancel{y} + 5z - 2 = 0 \qquad 2x + 6z = 6$$

$$\underline{x + 3z = 3}$$

Per trovare B devo prima trovare equazioni cartesiane per r:

$$t = -1-z \qquad x = 2+3(-1-z) \qquad x = -1-3z$$
$$y = 1+2(-1-z) \qquad y = -1-2z$$

$$r \begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Il generico piano per r ha equazione

$$\lambda(x+3z+1) + \mu(y+2z+1) = 0 \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0)$$

Impongo il passaggio per P:

$\lambda(0+3\cdot 1+1)+\mu(5+2\cdot 1+1)=0$

$4\lambda+8\mu=0$ $\quad \underline{\lambda=2 \quad \mu=-1}$ e B ha equazione

$2x+6z+2-y-2z-1=0$ $\quad \underline{2x-y+4z=-1}$

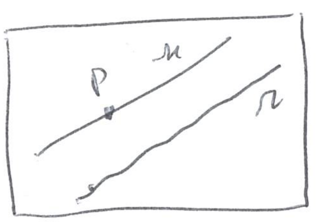
Allora u ha equazioni cartesiane

$$\boxed{u \begin{cases} 2x-y+4z=-1 \\ x+3z=3 \end{cases}}$$

È davvero la soluzione del nostro problema?

Si verifica subito che $P\in u$.

Quello che non è chiaro è se u interseca o meno ciascuna delle rette r, s. Ragioniamo così. Entrambe le rette u, r stanno nel piano B. Inoltre sono distinte, cioè $u\neq r$ perché $P\in u$, ma $P\notin r$. Quindi, se $u \parallel r$ allora $u\cap r=\emptyset$!!!



Analogamente si può ragionare per vedere se $u\cap s\neq\emptyset$ o meno.

Ora, si calcola che la direzione di u è generata dal vettore

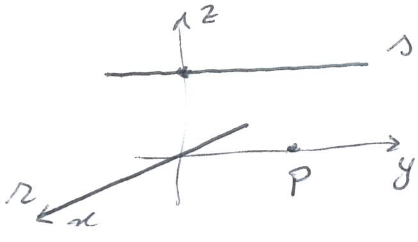
$$w=\begin{vmatrix} 1 \\ -10 \\ -3 \end{vmatrix}$$

Quindi u non è parallela né ad r, né ad s ed effettivamente è la soluzione del problema

<u>ESEMPIO</u>

Consideriamo in $\mathbb{A}^3$ le due rette

$r\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ e $s\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$



e sia $P(0,1,0)$. Allora le rette r, s sono sghembe tra loro e $P \notin r \cup s$. La retta u in questo caso risulta essere l'asse y, che è parallelo ad s. Quindi effettivamente è possibile che questo tipo di problema non abbia soluzione.

Non abbiamo mai parlato di rette "ortogonali", di "distanza tra due punti", ecc.

Def. Uno spazio affine (A, V, α) si dice METRICO, o EUCLIDEO, se è fissato un prodotto scalare su V

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se (A, V, φ, α) è uno spazio affine euclideo, allora un sistema di COORDINATE CARTESIANE ORTOGONALI su A è dato da $(O, \mathcal{B})$, dove $O \in A$ e $\mathcal{B}$ è una base di V, ON risp. φ.

$$_{\mathcal{B}}V \xrightarrow{K_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n{}_{\mathcal{B}_c} \qquad (n = \dim(V))$$

Si ha per ogni $u, v \in V$:

$$\varphi(u, v) = \langle K_{\mathcal{B}}(u), K_{\mathcal{B}}(v) \rangle_{st}$$

Qui entra in gioco il fatto che $\mathcal{B}$ sia una base ON di V risp. φ.

Per noi, d'ora in poi:

$V = \mathbb{R}^n \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_c \qquad \varphi = \langle \, , \, \rangle_{st}$

$$P, Q \in A \qquad d(P, Q) \overset{def}{=} \| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{\langle Q-P, Q-P \rangle_{st}}$$

ORTOGONALITÀ TRA RETTE E PIANI

È una proprietà che riguarda SOLO la giacitura di tali rette e piani.

- Siano r, s due rette di A^3, con

$T(r) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{"}\mathbb{R}u\text{"}$ $\quad u \in \mathbb{R}^3 \quad u \neq 0$

$T(s) = \{\mu v \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}v$ $\quad v \in \mathbb{R}^3 \quad v \neq 0$

Allora r ed s si dicono ortogonali $\iff \langle u, v\rangle = 0$

Scriveremo $r \perp s$

Questa proprietà non dipende dalla base u di $T(r)$ scelta (lo stesso per v e $T(s)$):

Se $u' \in T(r)$ e $u' \neq \underline{0}$, allora $u' = \lambda u$ $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

e si ha

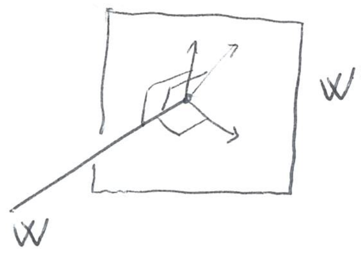
$$\langle u', v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \underset{\neq 0}{\lambda}\langle u, v\rangle$$

Dunque

$$\langle u', v\rangle = 0 \iff \langle u, v\rangle = 0$$

- Siano $r \subset A^3$ una retta e $B \subset A^3$ un piano.

Poniamo $W = T(r)$ e $W' = T(B)$.



Allora diremo che r è ortogonale a B se

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \ \forall w \in W\} = W'$$

$r \perp B$

$\mathbb{R}^n, \langle\, , \,\rangle_{st}$ $\quad W \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio.

Avevamo visto che:

$$\underbrace{\underbrace{u_1, \dots, u_r}_{\text{base di } W}, u_{r+1}, \dots, u_n}_{\text{base di } \mathbb{R}^n}$$

Applichiamo a questa base il procedimento di orto-normalizzazione di G-S

Otteniamo

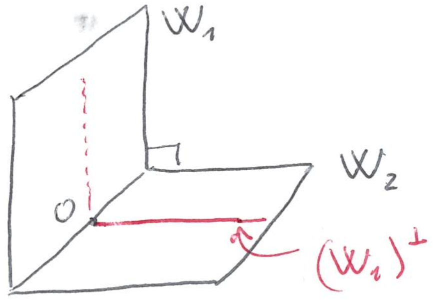
$\underbrace{v_1, \ldots, v_r}_{\text{base ON di } W}, v_{r+1}, \ldots, v_n$ base ON di $\mathbb{R}^n$

Allora $W^\perp = \operatorname{Span}(v_{r+1}, \ldots, v_n) \Rightarrow \dim(W^\perp) = n - \dim(W)$.

Tutto questo mostra anche che $\underline{\underline{W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp = W}}$

Allora da $W^\perp = W'$ segue $W = W^{\perp\perp} = (W')^\perp$

- B_1, B_2 siano due piani in $\mathbb{A}^3$, $W_i = T(B_i)$

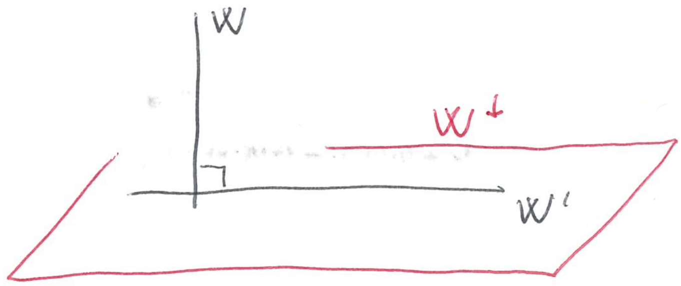


$B_1 \perp B_2 \iff (W_1)^\perp \subset W_2$

$\iff (W_1)^{\perp\perp} \supset W_2^\perp$ cioè

$W_2^\perp \subset W_1$

- Riconsideriamo il caso delle due rette r, s.



$r \perp s \iff$

$W' \subset W^\perp \iff$

$(W')^\perp \supset W^{\perp\perp} = W$

Quindi tutte queste condizioni sono simmetriche, non dipendono, cioè, dall'ordine in cui consideriamo i due sottospazi affini.