Esercizi Geometria 3A

11/12/2017

1. Si consideri la superficie S con la parametrizzazione
$$\varphi(u,v)=\left(u-\frac{u^3}{3}+uv^2, v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2\right).$$
Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale e calcolare le curvature principali. Mostrare che le curve coordinate sono linee di curvatura in S ($\alpha(t)$ è una linea di curvatura se $\alpha'(t)$ è un autovettore della seconda forma fondamentale calcolata nel punto $\alpha(t), \forall t$).

2. Sia S una superficie regolare e sia $\alpha : I \rightarrow S$ una curva biregolare in S parametrizzata in lunghezza d'arco tale che $\lambda_1\lambda_2 > 0$ nel punto $\alpha(0)$. Mostrare che
$$|\alpha''(0)| \geq min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\},$$
dove λ_1, λ_2 sono le curvature principali della seconda forma fondamentale.

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, costanti non nulle con $a > b$. Si consideri la superficie generata dalla rotazione di una circonferenza di centro $(a, 0)$ e raggio b sul piano xz. Dare una parametrizzazione di un aperto di tale superficie. Di che superficie si tratta?
Calcolare la prima forma fondamentale, la seconda forma fondamentale, la curvatura Gaussiana e la curvatura media.

4. Trovare tutte le superfici minime di rotazione.

5. Dimostrare che la curvatura gaussiana di una superficie rigata è in ogni punto minore o uguale a 0. Una superficie rigata S è una superficie parametrizzata da $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della forma $\varphi(u,v) = Q(u) + v\, r(u)$, dove $Q, r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono funzioni differenziabili. Si supponga S regolare.

6. Siano $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ applicazioni C^{∞}. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie Σ grafico dell'applicazione
$$(u, v) \mapsto a(u) + b(v), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$
   a. Si determini un campo continuo di vettori unitari su Σ, si calcolino la prima e la seconda forma fondamentale di Σ e la sua curvatura gaussiana;
   b. Si diano condizioni necessarie e sufficiente affinché la curvatura gaussiana di Σ sia identicamente nulla.
   c. Si verifichi che condizione necessaria e sufficiente affinché la curvatura media H sia nulla è che esista una costante c tale che
$$a'' = c(1 + (a')^2), \qquad b'' = -c(1 + (b')^2)$$
   e provare a risolvere l'equazione differenziale.

7. Si consideri la superficie in $\mathbb{R}^3$ definita da
$$x^2 + y^2 = 1$$
Dopo aver riconosciuto la superficie, se ne caratterizzi lo spazio tangente in ogni punto, ed infine si scriva esplicitamente un diffeomorfismo tra questa superficie e $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si riesce ad avere un diffeomorfismo che sia anche un'isometria locale?