ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 8

Trieste, 10 dicembre 2017

1. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti in K. Dimostrare che, se $B \in GL(n, K)$, allora AB ha lo stesso rango di A. Analoga domanda per CA se $C \in GL(m, K)$.

2. Dimostrare che la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, poi trovare una matrice S tale $S^{-1}AS$ sia diagonalizzabile. S è unica?

3. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la matrice reale A è diagonalizzabile, e per quali $c \in \mathbb{R}$ lo è la matrice C :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

su un campo K. Determinare se A è diagonalizzabile, risp. triangolarizzabile, sui campi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$.

5. Sia A una matrice triangolare della forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Determinare quali dei coefficienti a, b, c devono essere nulli affinché la matrice A sia diagonalizzabile, nei seguenti casi:

- tutti i λ_i sono distinti;
- tutti i λ_i sono uguali;
- $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$;
- $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$.

.