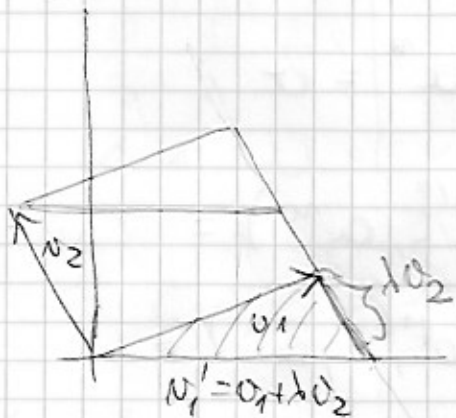


Dim.

Area \bar{e} (base) \cdot (altezza).

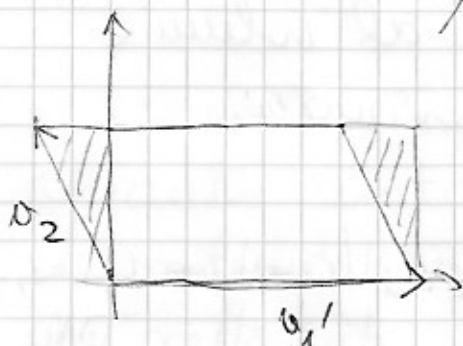


Modifico v_1, v_2 senza cambiare l'area, in modo da trovare un rettangolo

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_1 + \lambda v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Questa è una transf. elem., non cambia il det; il parall. non cambia area perché non cambia l'altezza perpendicolare a \bar{v}_2

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 + \mu v_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$$



$P(v_1', v_2')$ è un rettangolo

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = |ab|$$

"volume" del rettangolo

Si def. Volume del parallelepipedo

$$P(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

Prop. $A \in M(n \times n, K)$

A ha rango $r \iff A$ ha una sottomatrice inv. di ordine r e ogni matrice di

ordine s , con $s > r$, è non invertibile.

Determinanti delle sottomatrici $\overset{\text{quadrati di } A}{V}$ minori di A . Quindi la prop. dice che il rango di A è il max ordine di un minore non nullo di A .

Dim. Se A ha $\text{rg } r$, ha r righe l.u.i. indip., sup. siano a_{r1}, \dots, a_{rn} .

La matrice $\begin{pmatrix} a_{r1} \\ \vdots \\ a_{rn} \end{pmatrix}$ è $r \times n$, ha rango r

\Rightarrow ha r colonne l.u.i. \Rightarrow minore non nullo di A . \Rightarrow se un minore ha ord. $s > r$, r righe dip. \Rightarrow ha $\text{delt} = 0$

Vicev. se $\begin{pmatrix} a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,n} \end{pmatrix}$,

le r righe e colonne sono l.u.i. \Rightarrow minore r

Il rango non può essere $> r$, altrimenti trarrei un minore $\neq 0$ di ordine $> r$.

Autovalore di un endom. $f: V \rightarrow V$ \circ di una matrice A $n \times n$.

Autovettori: $v \neq 0$.

Autospazio di λ : $\text{Aut}(\lambda)$.

λ è autovalore $\Leftrightarrow \text{Aut}(\lambda) \neq \{0\}$.

$\text{Dim Aut}(\lambda) = m_\lambda(A)$ molteplicità geom. di λ
Autovettori di autovalori distinti sono l.u.i. indipendenti.

$\text{Aut}(0) = \text{Ker}(f)$.

$$\text{Aut}(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) = \{ x \in K^m \mid (A - \lambda E_n)x = 0 \}$$

$$\lambda \text{ è autovalore di } f \iff \det(f - \lambda \text{id}_V) = 0$$

$$\text{e } A = M_B(f), \quad B \text{ base finita}$$

$$\iff \det(A - \lambda E_n) = 0.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'eq.:

$$\det(A - x E_n) = 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - x & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} - x \end{vmatrix} = (a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x) + \text{pol. in } x \text{ di grado } \leq n-2 =$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + \cdots + a_{nn})}_{\text{traccia di } A} x^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

$\det(f - x \text{id}_V) =$ polinomio caratteristico di f .
 $P_f(x)$

Prop. autovalori di f sono gli zeri di $P_f(x)$.

→ Esempio

1) rotazione

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \alpha < 2\pi.$$

$$P_{R_\alpha}(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1 \quad \frac{\Delta}{4} = \cos^2 \alpha - 1 \leq 0$$

e lavoro su \mathbb{R} , il polinomio ha radici solo se $\cos^2 \alpha = 1 \implies \alpha = 0$ opp. π .

Per $\alpha = 0$ $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ autovalore 1
con $m_f(1) = 2$

$\alpha = \pi$ $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ autoval. -1.

Per lavoro su \mathbb{C} : $x_2 = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} =$
 $= \cos \alpha \pm \sqrt{-\sin^2 \alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i \alpha}$
2 autovalori complessi

2) Riflessione

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$P_{S_\alpha}(x) = x^2 - 1 \quad \text{Autoval. } i, -i$$

|| Prop. A, B simili $\Rightarrow P_A(x) = P_B(x)$.

Dim. ~~Es~~ $A = C^{-1}BC$

$$P_A(x) = |A - xE_n| = |C^{-1}BC - xE_n| =$$

$$= |C^{-1}BC - xC^{-1}E_nC| = |C^{-1}(B - xE_n)C| =$$

$$= |C^{-1}| |B - xE_n| |C|. \quad \text{Binet}$$

Corollario A, B simili: hanno non solo lo stesso det ma anche la stessa traccia e tutti i coeff. del pol. caract. sono uguali.

Def. $f: V \rightarrow V$ endomorfismo

\bar{f} diagonalizzabile se esiste una base $B = (v_1, \dots, v_n)$ di V formata da autovettori di f .

cio' significa che: $f(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, f(v_n) = \lambda_n v_n$:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ è diagonale}$$

2) A matrice quadrata è diagonalizzab. se lo è $L(A): K^n \rightarrow K^n \iff \exists$ base di autovettori di A cioè $M_B(L(A))$ è diagonale \iff

A è simile a una matrice diagonale.

\exists S invertibile h.c. SAS^{-1} sia diagonale.

Def. λ autovalore di $f: V \rightarrow V$

La mult. geom. $m_g(\lambda) = \dim \text{Aut}(\lambda)$.

λ è radice del pol. caratteristico di f $P_f(x)$: allora $P_f(x)$ è divisibile per $x - \lambda$.

La molteplicità algebrica di λ è il massimo

esponente m h.c. $P_f(x) = (x - \lambda)^m g(x)$;

$m_a(\lambda)$ è la molteplicità di λ come radice di $P_f(x)$; dev'essere $g(\lambda) \neq 0$.

$$P_f(x) = (x - \lambda)^{m_a(\lambda)} g(x) \text{ con } g(\lambda) \neq 0.$$

Prop. $f: V \rightarrow V$ endom., $\dim V = n$.

ha λ autovalore di f . Allora si ha sempre $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$.

Om. Se f ha n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la
 nec. molt. alg. uguale a uno e quindi molt. geom. ≤ 1 ;
 ho n autospa λ_i di dim 1 : auto rett. rel.
 a autovalori distinti sono lin. indip: f è diagon.

D'altra parte $p_f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$:
 ha grado n , non ponono esec. esponenti
 maggiori.

A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos \alpha & + \sin \alpha \\ \sin \alpha & - \cos \alpha \end{pmatrix}$ è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \cos \alpha & - \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ è simile a $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$

Om. se $p_A(x) = (x - \lambda)^n$, $m_{\lambda}(A) = n$;
 l'unico autoval. è λ ; A è diagonalizz.

\Leftrightarrow c'è una base di auto rett. di autoval. λ ,
 la matrice A è simile a λE_n

$\Leftrightarrow \text{Aut}(\lambda) = V$ ossia $m_{\lambda}(A) = n$.

In questo caso $f = \lambda \text{id}_V$.

Poniamo caratterizzare gli endom.
 diagonalizzabili come segue:

Teorema

$f: V \rightarrow V$ endomorfismo, $\dim V = n$.

Allora le seguenti prop. sono equivalenti:

1) f è diagonalizzabile;

2) il pol. caratteristico $P_f(x)$ è prodotto di n fattori lineari non necessariamente distinti

$$P_f(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \dots (\lambda_n - x),$$

e per ogni autovalore λ_i si ha $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.

3) se $\mu_1, \dots, \mu_k \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sono gli autovalori distinti di f , allora $V = \text{Aut}(\mu_1) \oplus \text{Aut}(\mu_2) \oplus \dots \oplus \text{Aut}(\mu_k)$.

Dim.

1) \Rightarrow 2) f diag. \Rightarrow esiste una base B di autovettori di f , e $M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ è

una matrice diagonale.

Allora $P_f(x) = \det(f - x \text{id}_V) = (\lambda_1 - x) \dots (\lambda_n - x)$ ha n fattori lineari. E per un certo λ_i si ~~ha~~ ^{considera} $m_a(\lambda_i)$, nella matrice λ_i è ripetuto $m_a(\lambda_i)$ volte, ossia nella base B ci sono $m_a(\lambda_i)$ autovettori di λ_i .

Allora $\dim \text{Aut}(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \geq m_a(\lambda_i)$; ma visto che vale sempre la diag. oppure, si conclude $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) \forall i$.

2) \Rightarrow 3) $P_f(x) = (\mu_1 - x)^{\pi_1} (\mu_2 - x)^{\pi_2} \dots (\mu_k - x)^{\pi_k}$ con $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_k = n$.

Allora $\pi_1 = m_a(\mu_1), \dots, \pi_k = m_a(\mu_k)$ per ipotesi
 $\quad \quad \quad m_g(\mu_1) \quad \quad \quad m_g(\mu_k)$
 Allora $\dim \text{Aut}(\mu_1) \quad \quad \quad \dim \text{Aut}(\mu_k)$

$$\dim \text{Aut}(\mu_1) + \dots + \dim \text{Aut}(\mu_k) = n = \dim V$$

Inoltre, siccome ~~set~~ autovettori relativi ad autovalori distinti sono l.c.r.,

la somma $\text{Aut}(\mu_1) + \dots + \text{Aut}(\mu_k)$ è diretta, e ogni vettore v si scrive come

$$\text{somma } v = w_1 + \dots + w_k, \quad \text{con } w_i \in \text{Aut}(\mu_i)$$

questa espressione è unica; infatti

$$\text{se } v = w_1 + \dots + w_k = w'_1 + \dots + w'_k, \text{ allora}$$

$$(w_1 - w'_1) + \dots + (w_k - w'_k) = 0$$

$$w_i - w'_i \in \text{Aut}(\mu_i)$$

$$w_i - w'_i \in \text{Aut}(\mu_k) \Rightarrow \text{sono l.c.r.}$$

l.c.r. ~~o~~ oppure tutti nulli.

Allora $\text{Aut}(\mu_1) \oplus \dots \oplus \text{Aut}(\mu_k)$ ha dim n
 \Rightarrow è uguale a V .

3) \Rightarrow 1) $V = \text{Aut}(\mu_1) \oplus \dots \oplus \text{Aut}(\mu_k)$: costruisco una base di V unendo basi dei vari autospazi, e ottengo una base di autovettori.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

è diagonalizzabile?

$$p_A(x) = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 \\ -3 & -2-x & 3 \\ -2 & -2 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= x(2+x)(3-x) + 6 + 6 - 2(x+2) - 6x - 3(3-x) =$$

$$= -x^3 + x^2 + \cancel{6x} + 12 - 2x - 4 - \cancel{6x} - 9 + 3x =$$

$$= -x^3 + x^2 + x - 1 = -x^2(x-1) + (x-1) =$$

$$= (1-x^2)(x-1) = (1-x)(1+x)(x-1) =$$

$= -(1-x)^2(x+1)$: ai fattori e ai fattori lineari gli autovett. sono

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{con } m_a(1) = 2 \quad : m_g(1) ?$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \text{con } m_a(-1) = 1 \quad \Rightarrow m_g(-1) = 1$$

$$\text{Aut}(1) = \text{Ker}(A - E_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice ha $\text{rg} \leq 2 \Rightarrow$ il nucleo ha dim 2
 $\Rightarrow m_g(1) = 2 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile.

Base di autovettori:

$$\text{Aut}(1): \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_2 + x_3$$

$$(-x_2 + x_3, x_2, x_3) = x_2(-1, 1, 0) + x_3(1, 0, 1)$$

$$\text{Aut}(1) = \langle (-1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

$$\text{Aut}(-1) = \text{Ker}(A + E_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+2x_2 = 3x_3 \quad x_2 = \frac{3}{2}x_3 \quad x_1 = x_2 - x_3 = \frac{3}{2}x_3 - x_3 = \frac{1}{2}x_3$$

$$\left(\frac{1}{2}x_3, \frac{3}{2}x_3, x_3\right) \quad \text{Aut}(-1) = \left\langle \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) \right\rangle = \langle (1, 3, 2) \rangle$$

$$B = ((1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 3, 2))$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1} A S$$

$$M_B(L(A)) = M_B^{(id)} M_B^B(L(A)) M_B^B(id_{P^3})$$

$\begin{matrix} \bar{S}^{-1} & A & \bar{S} \end{matrix}$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \bar{S}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det S = 2 - 3 - 1 = -2.$$

Facciamo poi la verifica: $A' = \bar{S}^{-1} A \bar{S}$ o sia

$$S A' = A S$$

$$S A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema fondamentale dell'algebra.

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. in \mathbb{C}
di grado $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

con $a_n \neq 0$, $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

Allora $p(x)$ ha almeno una radice λ

in \mathbb{C} . Dunque $p(x)$ è divisibile per $x - \lambda$: