- Spazio affine <u>EUCLIDEO</u> $\mathbb{E}^n$
- Isometrie $f:\mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$
- $f:\mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ isometria $\Longrightarrow$ esistono $P\in\mathbb{E}^n$ e $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$

t.c. L è lineare e L conserva il prodotto scalare: $\langle L(u), L(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ $\forall u, v\in\mathbb{R}^n$. Inoltre vale:

(1) $\boxed{f(Q)=f(P)+L(\overrightarrow{PQ})}$ $\quad\forall Q\in\mathbb{E}^n$

Si può dimostrare che L è <u>unico</u> e <u>dipende da f</u>

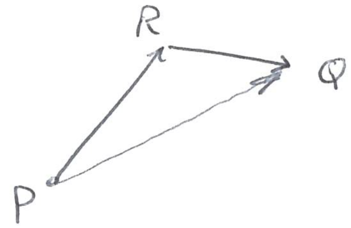
$L=f_*$ è la notazione corrente.

Sia f come sopra, e sia $R\in\mathbb{E}^n$ fissato, qualsiasi.

Allora: $\quad f(R)=f(P)+f_*(\overrightarrow{PR})$ per la (1). Si ha:

$$\underset{(b)}{\underline{f(R)+f_*(\overrightarrow{RQ})}} = f(P)+f_*(\overrightarrow{PR})+f_*(\overrightarrow{RQ}) = f(P)+f_*(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}) =$$

$$= f(P)+f_*(\overrightarrow{PQ}) \underset{(1)}{=} \underset{(a)}{\underline{f(Q)}} \qquad \forall Q\in\mathbb{E}^n$$



Quindi il punto "P" in (1) <u>non</u> <u>è</u> univocamente determinato.

<u>Qualsiasi</u> altro punto di $\mathbb{E}^n$ va altrettanto bene.

$f_*:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ è lineare e conserva $\langle\,,\rangle$.

Da questo segue $\mathrm{Ker}(f_*)=\{0\} \Longrightarrow f_*$ <u>è anche suriett.</u>

(Dunque f_* è un isomorfismo)

f_* suriettiva $\Longrightarrow$ <u>f è suriettiva</u>

<u>Dim.</u> Sia $T\in\mathbb{E}^n$ arbitrario. Poiché f_* è suriettiva esiste $u\in\mathbb{R}^n$ t.c. $f_*(u)=\overrightarrow{f(P)T}$. Pongo $Q=P+u$

$u=Q-P=\overrightarrow{PQ}$. Allora

$f(Q) = f(P) + f_*(\overrightarrow{PQ}) = f(P) + f_*(u) = f(P) + \overrightarrow{f(P)T} = T$

f isometria $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f \text{ è iniettiva} \\ f \text{ è suriettiva} \end{array}\right\} \Rightarrow$ f è <u>biiettiva</u>

Allora esiste $f^{-1}: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, e f^{-1} è ancora un'isometria.

Come si scrive un'isometria in coordinate?

$A = M_{\mathcal{B}}(f_*)$ $\quad \mathcal{B}$ ON $\Rightarrow A^{-1} = {}^tA$.

$P(\pi_1, \dots, \pi_n)$ $\quad f(P)(\pi_1', \dots, \pi_n')$ $\quad Q(x_1, \dots, x_n)$

$f(Q)(x_1', \dots, x_n')$

$f(Q) = f(P) + f_*(\overrightarrow{PQ})$ si traduce in

$$\begin{vmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_1' \\ \vdots \\ \pi_n' \end{vmatrix} + A \begin{vmatrix} x_1 - \pi_1 \\ \vdots \\ x_n - \pi_n \end{vmatrix}$$

<u>Osservazione</u>

$A^{-1} = {}^tA \Longrightarrow \det(A)^2 = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

Il segno "+" o "−" <u>non</u> dipende dal sistema di coordinate scelto.

Se per un'isometria f esso è "+", f si dice <u>ISOMETRIA DIRETTA</u>, o <u>MOVIMENTO RIGIDO</u>.

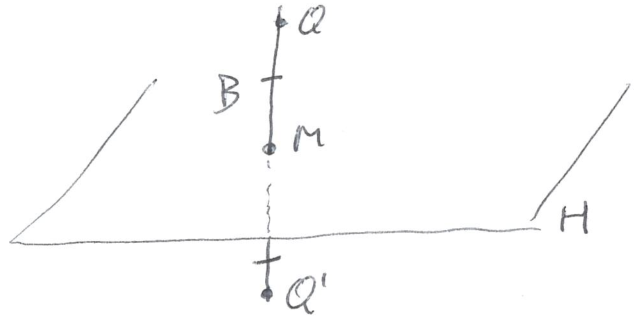
Composizione di isometrie:

$\underset{+\ \ +}{g \circ f}$ è "+" $\qquad \underset{+\ \ -}{g \circ f}$ è "−" $\qquad \underset{-\ \ -}{g \circ f}$ è "+"

ESEMPIO : SIMMETRIA ORTOGONALE RISPETTO AD UN IPERPIANO

$H \subset \mathbb{E}^n$ iperpiano fissato. $W \overset{def}{=} T(H)^\perp$ $\dim(W)=1$

Per ogni $Q \in \mathbb{E}^n$ la retta $B = \{Q + w \mid w \in W\}$ interseca H in un punto M. Sia

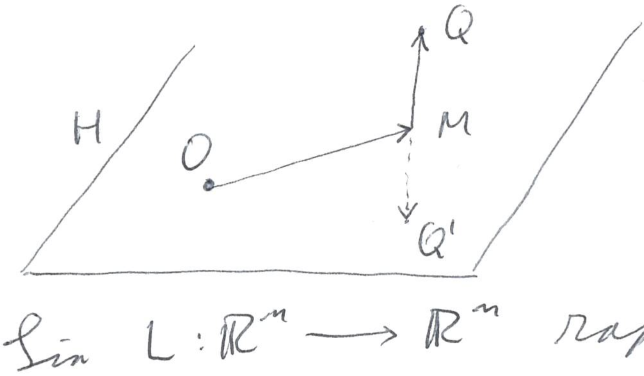


$Q' = \sigma_H(Q)$ il punto tale che $Q' \in B$ e M è punto medio di QQ': $d(Q,M) = d(Q',M)$

$\sigma_H : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$. Vedremo tra un momento che è isom.

Se $Q \in H$, in particolare, allora $\sigma_H(Q) = Q$ $(=M)$.
Se $Q \notin H$, allora $Q' \neq Q$ per definizione SPIEG.

Vogliamo scrivere σ_H in coordinate.
Ce le scegliamo comode !!! $O \in H$ e come base ON $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ consideriamo $u_1, \dots, u_{n-1}$ base ON di $T(H)$, e la completiamo a $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$, base ON di $\mathbb{R}^n$. Allora



$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ}$ e

$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MQ}$

Sia $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ rappresentata risp. alla base $\mathcal{B}$ dalla matrice:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$$

Le colonne di A sono una base ON di $\mathbb{R}^n$ risp. $\langle\, ,\rangle_{st}$ $\Longrightarrow$ $A^{-1} = {}^tA$, A è ortog.

Si verifica subito che

$\sigma_H(Q) = Q' = O + \overrightarrow{OQ'} = O + L(\overrightarrow{OQ})$ $\forall Q \in \mathbb{E}^n$.

A ortogonale $\Rightarrow$ L conserva $\langle , \rangle$. Allora si può verificare facilmente che σ_H è isometria.

NB. $\det(A) = -1 \Rightarrow \sigma_H$ non è isom. diretta.

$\sigma_H \circ \sigma_H = id_{\mathbb{E}^n} \Longrightarrow \sigma_H^{-1} = \sigma_H$. $L = (\sigma_H)_*$

Def. Sia $f: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$ isometria. Se $Q \in \mathbb{E}^n$ è tale che $f(Q) = Q$, allora Q si dice punto UNITO o PUNTO FISSO per f.

I punti di H sono tutti punti uniti per σ_H.
Se $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq \underline{0}$, allora τ_u non ha punti uniti.

"Le coordinate sono un mezzo"

ESERCIZIO Siano $A, B \in \mathbb{E}^n$ $A \neq B$. Considero $M \overset{def}{=} \{ P \in \mathbb{E}^n \mid d(P,A) = d(P,B) \}$. Che tipo di sottoinsieme di $\mathbb{E}^n$ è M?

Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ il sottospazio vett. gen. da $B - A = \overrightarrow{AB}$. $\dim(W) = 1$. Sia $O \overset{def}{=} A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ il punto medio del segmento AB.
Completiamo una base ON $u_1, \ldots, u_{n-1}$ di $W^\perp$ in una base ON $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ di $\mathbb{R}^n$.

Dunque u_n è un versore che genera W.
Consideriamo in $\mathbb{E}^n$ il sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(O, \mathcal{B})$.

In tali coordinate $A(0, \ldots, 0, a)$
$B(0, \ldots, 0, -a)$ COMMENTARE

$P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ sia arbitrario

$$d(P,A)^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + (x_n - a)^2$$

$$d(P,B)^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + (x_n + a)^2$$

$$d(P,A) = d(P,B) \iff d(P,A)^2 = d(P,B)^2 \iff$$

$$(x_n - a)^2 = (x_n + a)^2 \iff \cancel{x_n^2} - 2a x_n + \cancel{a^2} = \cancel{x_n^2} + 2a x_n + \cancel{a^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a x_n = 0 \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \iff \boxed{x_n = 0} \Rightarrow$$ M è un iperpiano di $\mathbb{E}^n$.

LEMMA

Se $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ è un'isometria con $f \neq id_{\mathbb{E}^n}$, allora gli eventuali punti uniti di f sono tutti contenuti in un iperpiano di $\mathbb{E}^n$.

Dim. Da $f \neq id_{\mathbb{E}^n}$ segue l'esistenza di un $A \in \mathbb{E}^n$ tale che $B = f(A) \neq A$. Sia $H = \{P \in \mathbb{E}^n \mid d(P,A) = d(P,B)\}$. Abbiamo visto nell'esercizio precedente che H è un iperpiano di $\mathbb{E}^n$.

Allora, se $P \in \mathbb{E}^n$ è t.c. $\underbrace{f(P) = P}_{\text{cioè } P \text{ è punto unito per } f}$ si ha

$$d(P, A) \underset{f \text{ è isom.}}{=} d(f(P), f(A)) \underset{f(P) = P}{=} d(P, B) \Rightarrow \underline{P \in H}$$

$\blacksquare$

TEOREMA

Se f è un'isometria di $\mathbb{E}^n$ avente $n+1$ punti fissi $P_0, P_1, \dots, P_n$ tali che i vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ formano una base di $\mathbb{R}^n$, allora $f = id_{\mathbb{E}^n}$.

Dim.

Infatti, se $f \neq id_{\mathbb{E}^n}$, allora esisterebbe un iperpiano $H \subset \mathbb{E}^n$ tale che $P_0, P_1, \dots, P_n \in H$. Ne seguirebbe $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in T(H)$. Ma tali vettori sono linearmente indipendenti, per ipotesi. Mentre $\dim(T(H)) = n-1$. Assurdo. ■

COROLLARIO

Se $f: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ è un'isometria avente tre punti uniti <u>non-allineati</u>, allora $f = id_{\mathbb{E}^2}$.

TEOREMA

Ogni isometria di $\mathbb{E}^2$ si ottiene componendo al più 3 simmetrie ortogonali rispetto a rette in $\mathbb{E}^2$.

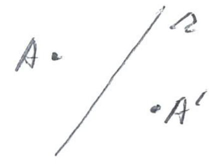
Dim.

Sia $f: \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ un'isometria.

Se $f = id_{\mathbb{E}^2}$ allora diremo che f è stata ottenuta componendo 0 simmetrie rispetto a rette.

Altrimenti, esiste $A \in \mathbb{E}^2$ tale che $A' = f(A) \neq A$.

Sia r l'asse del segmento AA'

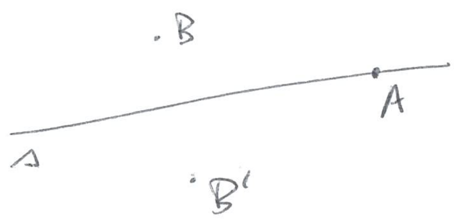


$\sigma_r \circ f(A) = A$ $\qquad A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{\sigma_r} A$

Se $\sigma_r \circ f = id_{\mathbb{E}^2} \Longrightarrow (\sigma_r \circ (\sigma_r \circ f)) = \sigma_r \circ id_{\mathbb{E}^2} \Longrightarrow \underline{f = \sigma_r}$

f è una simmetria risp ad una retta. Altrimenti esiste $B \in \mathbb{E}^2$ tale che $B' = (\sigma_r \circ f)(B) \neq B'$.

Sia s l'asse del segmento BB'.



A è punto unito per $\sigma_r \circ f$

Allora per il Lemma: $\underline{A \in s}$.

Considero l'isometria

$\sigma_s \circ \sigma_r \circ f : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$

$$A \xrightarrow{\sigma_r \circ f} A \xrightarrow{\sigma_s} A$$
$$B \xrightarrow{\sigma_r \circ f} B' \xrightarrow{\sigma_s} B$$

Sempre per il Lemma, ~~la~~ tutti i punti uniti di $\sigma_s \circ \sigma_r \circ f$ sono contenuti nella retta AB.

Se $\sigma_s \circ \sigma_r \circ f = id_{\mathbb{E}^2} \Longrightarrow \underline{f = \sigma_r \circ \sigma_s}$ e f è ottenuta mediante la composizione di $\underline{2}$ simmetrie ortogonali rispetto a rette. Altrimenti,

Poiché si suppone $\sigma_s \circ \sigma_r \circ f \neq id_{\mathbb{E}^2}$, allora esiste $C \in \mathbb{E}^2$ tale che $C' = (\sigma_s \circ \sigma_r \circ f)(C) \neq C$.

Dunque C non appartiene alla retta AB.

Sia t l'asse del segmento CC'. L'isometria $\sigma_t \circ \sigma_s \circ \sigma_r \circ f$ ha A, B, C come punti uniti.

Infatti $\underline{t \text{ è la retta } AB}$ SPIEGARE ----