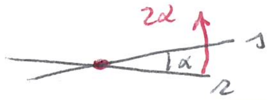
LEZIONE 45

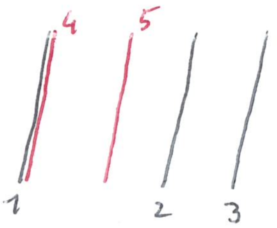
La volta scorsa abbiamo visto che:
ogni isometria di $\mathbb{E}^2$ si ottiene componendo <u>al più tre</u> simmetrie ortogonali rispetto a rette opportune.

Questo porta alla seguente classificazione:

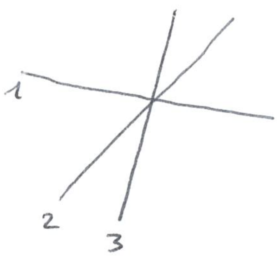
# simm. ortogonali		tipo di isometria	punti uniti?
0		$id_{\mathbb{E}^2}$	ogni punto di $\mathbb{E}^2$
1 σ_r		simm. ortog. risp. r	ogni punto di r
2 $\sigma_s \circ \sigma_r$	$r \parallel s, r \neq s$	traslazione  NB: il <u>verso</u>	nessuno
	$r \cap s = \{O\}$	rotazione attorno ad O, di un angolo 2α, nel verso da r ad s 	il punto O
3 $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$		??	

L'osservazione fondamentale per capire quest'ultimo caso è che la coppia di rette che fornisce una data traslazione (risp. rotazione) <u>non è unica</u>.

In certi casi questo permette di ricondurre $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ ad uno dei casi precedenti. Ad esempio



oppure

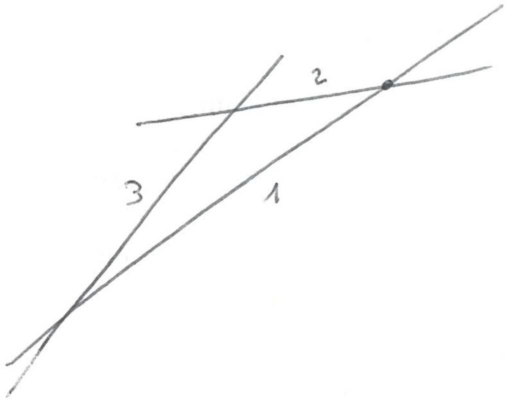


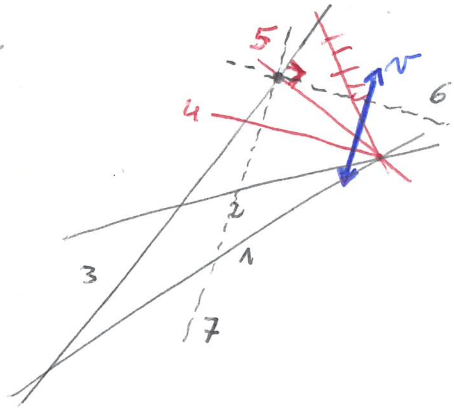
(✩)

ESERCIZIO

Utilizzare l'osservazione precedente per capire che tipo di isometria è la composizione di due rotazioni. Esaminare i tre casi possibili.

A parte i due casi in (✡), l'osservazione precedente permette di ricondurre $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ al caso in cui le tre rette 1, 2, 3 si intersechino a due a due in tre punti distinti:





$\sigma_3 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1) =$

$= \sigma_3 \circ (\sigma_5 \circ \sigma_4) =$

con $\underline{5 \perp 3}$

$= (\sigma_3 \circ \sigma_5) \circ \sigma_4 =$

$= (\sigma_7 \circ \sigma_6) \circ \sigma_4$

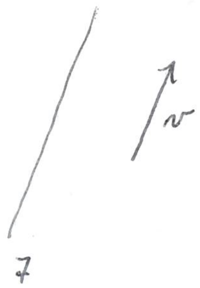
con $\underline{6 \parallel 4}$

Per costruzione, la retta 7 è ortogonale sia a 6 che a 4.

Riassumendo:

$$\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_7 \circ \underbrace{(\sigma_6 \circ \sigma_4)}_{\text{è la traslazione di vettore } v}$$

e v genera la direzione della retta 7.



Questa isometria si chiama <u>GLISSOSIMMETRIA</u>.

Non ha punti uniti.

<u>ESERCIZIO</u>

Studiare l'applicazione $f : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ data, rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali da

$$\begin{cases} x' = y + 4 \\ y' = x + 2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \right)$$

COMMENTI

$$\begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} = f\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \right) \qquad P(0,0) \text{ l'origine}$$

$$f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right) - f\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{f_*}\underbrace{\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right)}_{\overrightarrow{PQ}}$$

$f(Q)$ $\quad f(P)$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ le colonne di A formano una base ON di $\mathbb{R}^2$ risp. $\langle\, , \rangle_{st}$. Dunque A è matrice ortogonale.

Pertanto f è un isometria. $\det(A) = -1 \Rightarrow$ o f è una simmetria assiale, o f è una glissosimmetria. Per scoprire quale delle due è vera possiamo studiare i punti uniti di f:

$\begin{cases} x = y+4 \\ y = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x-y=-2 \end{cases}$ dunque f non ha punti uniti, e quindi è una glissosimmetria.

Per capire f "geometricamente" devo trovare la retta r ed il vettore v tali che $f = \sigma_r \circ \tau_v$ ($= \tau_v \circ \sigma_r$ EXE!). Osservo che $f: r \to r$, cioè la retta r è invariante per f anche se non "punto per punto".

Sia $y = mx+q$ l'equazione di r. Allora

$(x,y) \in r \Rightarrow (x',y') \in r$ si traduce in $y' = mx'+q$

cioè: $x+2 = y' = mx'+q = m(y+4)+q \underset{y=mx+q}{=} m(mx+q+4)+q \Rightarrow$

$x+2 = m^2x + mq + 4m + q \iff \underbrace{(m^2-1)x = 2 - mq - 4m - q}_{\text{deve essere soddisfatta } \forall x \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 & \Rightarrow m = \pm 1 \\ 2 - mq - 4m - 4 = 0 \end{cases}$

$m = -1 \Rightarrow$ assurdo

$m = +1 \Rightarrow q = -1$ $\quad \boxed{r \quad y = x-1}$

ISOMETRIE di $\mathbb{E}^3$

Siano $A, B, C, D \in \mathbb{E}^3$ non contenuti in alcun piano.
Sia $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ una qualsiasi isometria. Indichiamo
$f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$.

PBL. Esiste un'isometria $g : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$, con $g \neq f$, tale che $g(A) = A'$ $g(B) = B'$ $g(C) = C'$ $g(D) = D'$?

Supponiamo esista una tale g. Allora $g^{-1} : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ è ancora un'isometria. Quindi anche $g^{-1} \circ f$ è un'isometria. Si ha:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g^{-1}} A \\ B &\longrightarrow B' \longrightarrow B \\ C &\longrightarrow C' \longrightarrow C \\ D &\longrightarrow D' \longrightarrow D \end{aligned}$$

cioè $g^{-1} \circ f$ ha i punti fissi A, B, C, D. Ora, l'ipotesi fatta che tali punti non siano contenuti in alcun piano di $\mathbb{E}^3$, equivale al fatto che $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ sia una base di $V = \mathbb{R}^3$.

Pertanto $g^{-1} \circ f = id_{\mathbb{E}^3} \Rightarrow (g \circ (g^{-1}) \circ f) = g \circ id_{\mathbb{E}^3} \Longrightarrow$

$\Rightarrow f = g$, assurdo.

In conclusione, è unica l'isometria di $\mathbb{E}^3$ che manda $A \longrightarrow A'$, $B \longrightarrow B'$, $C \longrightarrow C'$ e $D \longrightarrow D'$.

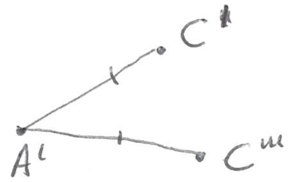
Se $A \neq A'$ sia π_a il piano asse del segmento AA'.

$\sigma_{\pi_a}(A) = A'$ $\sigma_{\pi_a}(B) = B''$ $\sigma_{\pi_a}(C) = C''$ $\sigma_{\pi_a}(D) = D''$.

Se $B'' \neq B'$ sia π_b il piano asse del segmento BB'. Tale piano passa per A'. Dunque, indicato con σ_b la simmetria ortogonale rispetto a π_b si ha che

$\sigma_b \circ \sigma_a(A) = A'$ $\sigma_b \circ \sigma_a(B) = B'$ $\sigma_b \circ \sigma_a(C) = C'''$ ecc.

Se $C''' \neq C^*$, sia π_c il piano asse del segmento C^*C''', e sia σ_c la corrispondente simmetria ortogonale.



$$d(A', C^*) = d(A', C''') \longrightarrow A' \in \pi_c$$

Analogamente si verifica che $B' \in \pi_c$,

Quindi

$$\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a (A) = A' \qquad \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a (B) = B' \qquad \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a (C) = C'$$

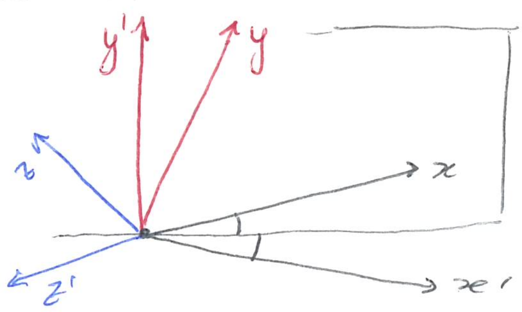
Se $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a (D) \neq D'$, un'ulteriore simmetria ortogonale rispetto ad un piano (che contiene i punti A', B', C'; dunque è il piano per tali punti!!) "farà coincidere" $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a (D)$ con D'.

In conclusione:

PROPOSIZIONE

Ogni isometria di $\mathbb{E}^3$ si può ottenere componendo al più quattro simmetrie ortogonali rispetto a piani.

⌈Un'isometria che ha un punto fisso O è la composizione di al più tre simmetrie ortogonali rispetto a piani: una per far coincidere i due assi x, un'altra per gli assi y, e una terza (se necessaria) per gli assi z. Poiché un'ulteriore simmetria sarà sufficiente per far coincidere due diverse origini, si conclude con



Sia $f: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ un'isometria qualsiasi, $\neq id_{\mathbb{E}^3}$

Se non è un'isometria diretta, allora preso un qualsiasi piano $\pi \subset \mathbb{E}^3$, l'isometria $g \overset{def}{=} \sigma_\pi \circ f$ è diretta.

Se "capisco bene" g, allora capisco anche f perché

$\sigma_\pi \circ g = (\sigma_\pi \circ (\sigma_\pi) \circ f) = f$.

Quindi, è sufficiente studiare le isometrie dirette di $\mathbb{E}^3$. Per una tale isometria si hanno due casi:

- o f ha un punto unito
- oppure f non ha punti uniti.

TEOREMA DI EULERO (tratta il primo caso)

$f: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ isometria diretta, $f \neq id_{\mathbb{E}^3}$ e sia $O \in \mathbb{E}^3$ t.c. $f(O) = O$. Allora esiste una retta r passante per O tutta formata da punti uniti per f. f è la rotazione attorno ad r ("di asse r") di un angolo α.

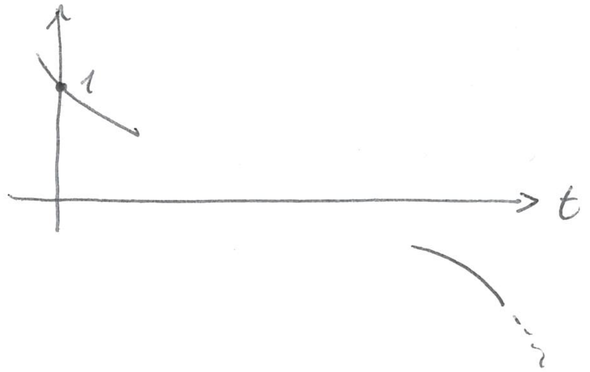
Dim. Introduciamo in $\mathbb{E}^3$ un sistema di coordinate - cartesiane ortogonali di cui il punto fisso O di f sia l'origine. Allora, in coordinate $f = f_*$, cioè

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

con A matrice ortogonale t.c. $\det(A) = +1$ (perché f è isometria diretta). Quindi

$p_A(t) = -t^3 + \ldots + 1 \qquad 1 = p_A(0) = \det(A)$.

Per il teorema del valore intermedio in Analisi, $p_A(t)$ ammette almeno una radice reale, >0



LEMMA

Se $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo che conserva il prodotto scalare (cioè $\langle\varphi(u),\varphi(v)\rangle=\langle u,v\rangle\ \ \forall u,v\in\mathbb{R}^n$. Il nostro f_γ verifica questa ipotesi), allora gli unici autovalori possibili per φ sono ±1.

Dim. Sia $u\in\mathbb{R}^n$ un autovettore di φ, relativo all'autovalore λ. Allora

$$\underline{0\neq}\|u\|^2=\langle u,u\rangle=\langle\varphi(u),\varphi(u)\rangle=\langle\lambda u,\lambda u\rangle=\lambda^2\langle u,u\rangle=$$
$$=\lambda^2\|u\|^2\Longrightarrow\lambda^2=1\Longrightarrow\lambda=\pm1$$ ■

Dunque chiaramente $\underline{p_A(1)=0}$. Sia $u\in\mathbb{R}^3$ un autovettore $\underbrace{\ }_{\text{per } f_*}$ relativo all'autovalore 1.

Sia $U=\mathrm{Span}(u)$; $\dim(U)=1$.

Sia $H\overset{def}{=}U^\perp\subset\mathbb{R}^3=\underline{\mathbb{E}^3}$ SPIEGARE Sarà $\underline{r=U}$

$\dim(H)=3-1=2$. $w\in H\iff\langle u,w\rangle=0$.

Allora, poiché f_* conserva i prodotti scalari, si ha

$$0=\langle u,w\rangle=\langle f_*(u),f_*(w)\rangle=\langle 1\cdot u,f_*(w)\rangle=\langle u,f_*(w)\rangle$$

Dunque $\forall w\in H$ si ha che $f_*(w)\in H$

Tenuto conto che $f=f_*$ $\quad f|_H:H\longrightarrow H$ e

$f|_H$ è ancora un'isometria.

Supponiamo, come è lecito: $\|u\| = 1$.
Sia $\mathcal{B}'$ una base ON di H. Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{u\}$ è una base ON di $\mathbb{R}^3$. La matrice che rappresenta f_* rispetto a tale base è ,

$$B = \left|\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & C \end{array}\right|$$

e C è matrice 2×2 ortogonale

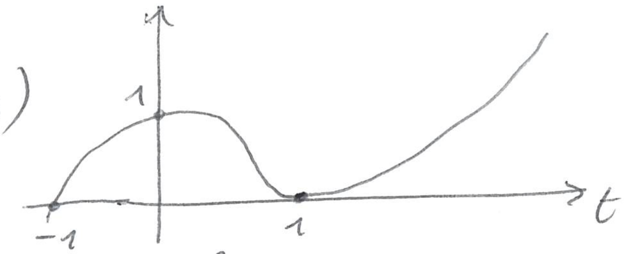
SPIEGARE

Allora, o $C = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ o $C = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

Nel secondo caso si avrebbe (poiché A, B sono simili):

$p_A(t) = p_B(t) = -(t-1)^2(t+1)$

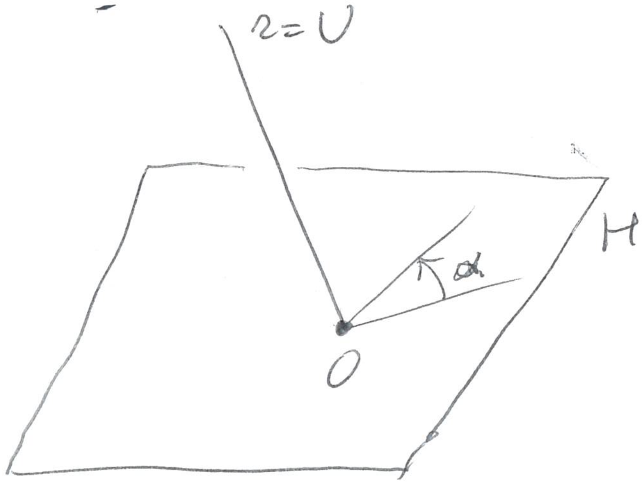
In tal caso, il grafico di $p_A(t)$ sarebbe



$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} p_A(t) = +\infty$

Assurdo SPIEGARE.

Dunque C è come nel primo caso, una matrice di una rotazione



<u>TEOREMA</u> (tratta il "secondo caso")
$f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ sia isometria diretta, $\neq id_{\mathbb{E}^3}$. f non abbia punti uniti. Allora f è una <u>ROTOTRASLAZIONE</u> $f = \tau_v \circ \rho$ (τ_v è una traslazione e ρ è una rotazione).
La <u>direzione dell'asse di rotazione</u> e l'<u>angolo di rotazione</u> sono <u>univocamente determinati</u>.

Dim.
$A \in \mathbb{E}^n$ arbitrario. $A' = f(A) \neq A$ perché f non ha punti uniti. Sia $v = \overrightarrow{Af(A)} = f(A) - A$. τ_{-v} è isometria diretta, quindi $\tau_{-v} \circ f$ è isometria diretta e $(\tau_{-v} \circ f)(A) = \tau_{-v}(f(A)) = A$.
Se $\tau_{-v} \circ f = id_{\mathbb{E}^3}$, allora $\underline{f = \tau_v}$ (non c'è "rotazione").
Altrimenti $\tau_{-v} \circ f \neq id_{\mathbb{E}^3}$ è un'isometria diretta con il punto unito A. Posso applicare il Teorema di Eulero:

$\tau_{-v} \circ f = \rho$ rotazione $\Rightarrow$ $\underline{f = \tau_v \circ \rho}$.

Se $f = \tau_w \circ \rho'$, allora $\tau_v \circ \rho = \tau_w \circ \rho'$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho = \tau_{-v} \circ \tau_w \circ \rho' = \tau_{w-v} \circ \rho' \Rightarrow \rho_* = \underbrace{(\tau_{w-v})_*}_{id_{\mathbb{R}^3}} \circ \rho'_*$$

$\rho_* = \rho'_*$ $\Rightarrow$ la direzione dell'asse di rotazione e l'angolo di rotazione sono univocamente determinati.