LEZIONE 46



Domanda fatta da uno studente: "Se ho un'isometria $f: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n$, da "dove sbuca" $f_*: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineare? Cioè: a che cosa serve?" Più o meno.

---

$\mathbb{E}^n$ è, innanzitutto, uno spazio affine. Gli spazi affini sono oggetti complicati: $(\mathbb{A}, V, \alpha)$

Un'isometria si propone di "mettere in relazione" in modo "adeguato" uno spazio affine euclideo con se stesso. Si cerca di fare qualcosa di analogo all'introduzione delle applicazioni lineari per mettere in relazione due spazi vettoriali. In tal caso non bastava una semplice applicazione $f: V \longrightarrow V'$. Bisognava richiedere che $f$ "rispettasse" sia l'operazione di addizione dei vettori;

$$f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } V}}{u + v}) = f(u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } V'}}{+} f(v)$$

sia l'operazione di prodotto per uno scalare.

Qui, nel caso di $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{A}^n$, $\mathbb{A}$ ... dobbiamo fare qualcosa di analogo.

Vogliamo "mettere in relazione" due spazi affini $(\mathbb{A}, V, \alpha)$ e $(\mathbb{A}', V', \alpha')$. Possono anche essere diversi. Sarà necessaria una $f: \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$, ma non basta. Anche $V$ ed $\alpha$ devono entrare nel gioco!!!

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \times V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\vdots f_*"] & \mathbb{A} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{A}' \times V' \arrow[r, "\alpha'"'] & \mathbb{A}' \end{tikzcd} \quad (1)$$

Come minimo ci serve una $f_*: V \longrightarrow V'$. E, visto che $V, V'$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, richiediamo che $f_*$ sia un'appl. lineare.

Ma anche $\alpha$ ed $\alpha'$ devono fare qualcosa.

La cosa "naturale" da fare (per un matematico ...) è richiedere che il diagramma (1) sia commutativo.
Cioè: nel diagramma ho due modi (vie) diversi di arrivare ad $\mathbb{A}'$ partendo da $\mathbb{A}\times V$.
Chiedere che (1) sia commutativo significa chiedere che

$$f\circ\alpha = \alpha'\circ(f\times f_*) \qquad \text{SPIEGARE!}$$

cioè che il risultato finale sia lo stesso. Ovvero

$\forall P\in\mathbb{A}$ e $\forall u\in V$ ho

$$\begin{tikzcd}
(P,u) \arrow[r, mapsto, "\alpha"] \arrow[d, "f\times f_*"] & P+u \overset{\text{def}}{=} Q \arrow[dr, "f"] & \Rightarrow u = Q-P = \overrightarrow{PQ} \\
(f(P), f_*(u)) \arrow[r, mapsto, "\alpha'"] & \underbrace{f(P)+f_*(u)}_{\text{in } \mathbb{A}'} = & f(P+u) = f(Q)
\end{tikzcd}$$

RICHIEDO

$$\underbrace{f(Q) = f(P) + f_*(\overrightarrow{PQ})}_{\text{vecchia conoscenza}}$$

Ho solo seguito la linea di minima resistenza.

Se $\mathbb{A}$ ed $\mathbb{A}'$ sono due spazi affini euclidei questo vuol dire che:
ho un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_V : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ su $V$ ed
" " " " $\langle\ ,\ \rangle_{V'} : V'\times V' \longrightarrow \mathbb{R}$ su $V'$

Allora richiedere che $f_*: V\longrightarrow V'$ sia solo un'appl. lineare non basta!!! Dimentico un "pezzo" importante della struttura.
Devo richiedere che $f_*$, oltre ad essere lineare, conservi il prodotto scalare:

$$\langle f_*(u), f_*(v)\rangle_{V'} = \langle u,v\rangle_V \qquad \forall u,v\in V$$

CONICHE

$\mathbb{E}^2$ dotato di un sistema di coord. cart. ortogonali $O, x, y$.

~~Am~~ **Def** Chiamiamo CONICA il luogo di tutti i punti di $\mathbb{E}^2$, le cui coordinate soddisfano un' equazione del tipo

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_3 = 0 \qquad \text{"}a\text{"} \in \mathbb{R}$$

con $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$.

Cioè, vogliamo che l'equazione (1) sia proprio di grado $\underline{2}$ in $x, y$.

Conviene riscrivere l'equazione (1) così:

$$(2) \quad [x \;\; y \;\; 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad A \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

A è simmetrica. Sarà importante anche la sottomatrice

$$A' \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{anche lei simmetrica}$$

Vogliamo "classificare le coniche rispetto alle isometrie". Sia $C$ una conica, di equazione (1) (o (2)). Sia $f: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ un' isometria. Che cosa si può dire di $f(C)$?

COMMENTARE

$$f\left(\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = f^{-1}\left(\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}\right)$$

$f^{-1}: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ è ancora un' isometria.

$$R \in f(C) \iff f^{-1}(R) \in C$$

In coordinate, $f^{-1}$ sia data da

$$f^{-1}\left(\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix} + M \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$$ con $M$ matrice $2\times 2$ ortogonale

Si vede subito che

(3) $$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = f^{-1}\left(\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}\right) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & p \\ m_{21} & m_{22} & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}$$ dove $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$

(N.B.: $M$ <u>non</u> è necessariamente simmetrica)

$$P \overset{def}{=} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & p \\ m_{21} & m_{22} & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\text{a blocchi}}$$

$\det(P) = 1 \cdot \det(M) = \pm 1$ perché $M$ è ortogonale $\Rightarrow$

(4) $\det(P) = \pm 1$ In particolare, <u>$P$ è invertibile</u>

Ora:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} \in f(C) \Longleftrightarrow f^{-1}\left(\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}\right) = P \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} \in C \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} {}^t\left(P \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}\right) A P \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = 0$$ cioè

(✱) $$|x' \; y' \; 1| \left({}^tPAP\right) \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix} = 0$$ $\underline{\underline{B \overset{def}{=} {}^tPAP}}$

Inoltre: $A$ simmetrica $\Rightarrow$ ${}^tPAP$ è anche simmetrica.

Quindi (✱) è l'equazione di una conica, e abbiamo provato

$C$ conica $\Rightarrow f(C)$ conica (se $f$ è isometria)

---

<u>IDEA</u>: se $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^2$ e $\mathcal{F}' \subset \mathbb{E}^2$ sono due qualsiasi sottoinsiemi (= "figure geometriche"), e se esiste $f: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ isometria t.c. $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, allora si pensa che $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ siano sostanzialmente la stessa figura geometrica.

Cerchiamo, quindi, delle isometrie $f$ tali che la conica $f(C)$ abbia un'equazione "più semplice" di quella di $C$

Così proseguendo si cerca di arrivare ad un numero finito di casi standard.
Allora, ogni volta che abbiamo una conica dovremo fare tutta questa tiritera? NO!!
La conica è data completamente dalla sua equazione (1), o meglio: dalla (2). Tutta l'informazione sulla conica è, quindi, potenzialmente presente nella matrice A. Dobbiamo imparare solo "che cosa leggere in A" per sapere il risultato finale.

---

Vediamo quali dati della matrice A restano invariati per isometria, cioè coincidono con i corrispondenti dati della matrice B.
Innanzitutto, da (4) segue

(5) $\underline{\det(B) = \det({}^tPAP) = \det(A)}$

Inoltre, essendo P invertibile, A e B sono matrici congruenti, dunque

(6) $\underline{rg(B) = rg(A)}$ $\quad (\geq 1 \quad e \quad \leq 3)$

"*" significa: "non mi interessa"

Calcoliamo B':

$$B = {}^tPAP = \left[\begin{array}{c|c} {}^tM & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline p \quad q & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A' & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \\ \hline a_1 \quad a_2 & a_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} {}^tMA' & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ \hline * \quad * & * \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} {}^tMA'M & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ \hline * \quad * & * \end{array}\right] \Rightarrow \underline{B' = {}^tMA'M} = M^{-1}A'M$$

perché M è ortogon.

Quindi A' e B' sono matrici simili $\Rightarrow p_{A'}(t) = p_{B'}(t)$
da cui

(7) $\underline{\det(B') = \det(A')}$ e $\underline{Tr(B') = Tr(A')}$

det(A), rg(A), det(A'), Tr(A'), rg(A') sono tutti invarianti per isometrie

Incominciamo il gioco.

Visto che $A'$ è simmetrica, per il Teorema Spettrale esiste una matrice 2x2 ortogonale $M$ tale che

$${}^tMA'M = M^{-1}A'M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \underline{\alpha\beta = \det(A')} \quad e \quad \underline{\alpha+\beta = \mathrm{Tr}(A')}$$

Le relazioni sottolineate permettono di trovare $\alpha, \beta$ anche SENZA conoscere la matrice $M$. Comunque, immaginiamo di aver trovato anche $M$. Definiamo

$$P_1 = \left[\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{array}\right]$$

$P_1$ definisce un'isometria $f_1^{-1} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$.

Allora, come visto a pag. 4, $f_1(C) \subset \mathbb{E}^2$ sarà la conica di equazione

$$[x \ y \ 1]\,({}^tP_1AP)\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad B_1 \overset{def}{=} {}^tP_1AP_1 = \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & b_3 \\ 0 & \beta & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right]$$

ovvero

8) $$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 + 2b_1x + 2b_2y + b_3 = 0}$$

manca il termine in $xy$ !!!

Adesso cercherò di far sparire i termini in $x$ ed $y$. Per questo si può usare un'isometria molto semplice, una traslazione:

per motivi "grafici"

(9) $$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - p = X - p \\ y = y' - q = Y - q \end{cases}$$

Vado a sostituire questi nella (8):

$$\underbrace{\alpha(X-p)^2 + \beta(Y-q)^2} + 2b_1(X-p) + 2b_2(X-q) + b_3 = 0$$

$$\underbrace{\alpha X^2 + \beta Y^2}_{\text{non è cambiato}} + 2(-\alpha p + b_1)X + 2(-\beta q + b_2)Y + \underbrace{\alpha p^2 + \beta q^2 - 2b_1p - 2b_2q + b_3}_{(w)}$$

Vogliamo determinare $p, q$ in modo che sia

$$-\alpha p + b_1 = 0 \qquad -\beta q + b_2 = 0$$

Se $\det(A') \neq 0$, allora da $\det(A') = \alpha\beta$ segue $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ e possiamo concludere

(10) $$p = \frac{b_1}{\alpha} \qquad q = \frac{b_2}{\beta}.$$

Sostituendo questi valori di $p, q$ nel termine noto (w) alla fine di pag. precedente si trova:

$$\alpha \frac{b_1^2}{\alpha^2} + \beta \frac{b_2^2}{\beta^2} - 2 b_1 \frac{b_1}{\alpha} - 2 b_2 \frac{b_2}{\beta} + b_3 = b_3 - \frac{b_1^2}{\alpha} - \frac{b_2^2}{\beta} \overset{def}{=} \gamma$$

<u>Riassumendo</u>: è un'isometria!

Nell'ipotesi che $\det(A') \neq 0$, l'immagine della conica di equazione (8) nella <u>traslazione</u> (9) con i $p, q$ dati dalle (10) è la nuova conica di equazione

(11) $$\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= \det(B_2) = \det(A) \\ \alpha\beta &= \det(B_2') = \det(A') \neq 0 \text{ per ipotesi} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \gamma = \frac{\det(A)}{\det(A')}$$

N.B. Può benissimo essere $\gamma = 0$.

<u>Nell'ipotesi $\det(A') \neq 0 \iff rg(A') = 2$</u>:

1) Se $\alpha, \beta, \gamma$ hanno tutti lo stesso segno, allora $C = \emptyset$ (l'insieme vuoto)

Altrimenti $\alpha, \beta, \gamma$ <u>non</u> hanno tutti lo stesso segno

Supponiamo sia così.

2) Se $\alpha, \beta$ hanno segno uguale $\iff$ $\underline{\det(A') > 0}$ allora $\gamma$ ha segno opposto.

La (11) si può riscrivere così:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma \implies \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)x^2 + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)y^2 = 1 \qquad (12)$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} < 0 \implies -\frac{\alpha}{\gamma} > 0 \qquad \text{analogamente} \quad -\frac{\beta}{\gamma} > 0$$

Quindi la (12) si riscrive come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ e <u>C è un'ellisse</u>

3) Se $\alpha, \beta$ hanno segni opposti $\iff$ $\underline{\det(A') < 0}$ allora nella (12) $\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ e $\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)$ hanno segni opposti. Per fissare le idee, sia $-\frac{\alpha}{\gamma} > 0$.

Allora (12) diventa

$$\underbrace{\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}_{>0} x^2 - \underbrace{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}_{>0} y^2 = 1 \qquad \text{dunque} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e <u>C è un'iperbole</u>