$B = \left((1,0,1), (-1,1,0), (1,3,2) \right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1} A S$$

$$\overset{\shortparallel}{M_B(L(A))} = \underset{S^{-1}}{M^B_{\mathcal{E}}(id)}\; \underset{A}{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L(A))}\; \underset{S}{M^B_{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det S = 2 - 3 - 1 = -2$.

Faccio poi la verifica: $A' = S^{-1} A S$ ossia

$SA' = AS$

$$SA' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema fondamentale dell'algebra.

Sia $p(x)$ un polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

con $a_n \neq 0$, $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$.

Allora $p(x)$ ha almeno una radice λ in $\mathbb{C}$. Dunque $p(x)$ è divisibile per $x - \lambda$:

$p(x) = (x-\lambda)\, p_1(x)$, con $p_1(x)$ di grado $n-1$;

allora si ripete ~~e~~ e si ottiene che $p(x)$ è prodotto di n fattori lineari.

Per trovare $p_1(x)$ si esegue la divisione di polinomi.

Attenzione! formula risolutiva per radicali solo per grado $n \le 4$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_A(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2+1 =$$

$$= (x+i)(x-i)$$

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$; è simile a $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; non lo è su $\mathbb{R}$.

$$Aut(i) = \ker\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1+i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 + i x_2 = 0$$

$$(-ix_2, x_2) = x_2(-i, 1)$$

$$Aut(i) = \langle (i, -1) \rangle$$

$$Aut(-i) = \ker\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cancel{+} - i x_2 = 0 \qquad (ix_2, x_2) = x_2(i, 1)$$

$$B = ((i, -1), (i, 1))$$

$$A' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1}AS, \quad \text{con } S = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det S = 2i \qquad S^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}i\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2i} = a + bi \qquad 2ai + 2bi^2 = 1 \qquad 2ai - 2b - 1 = 0$$

$$= -\frac{1}{2}i \qquad 2ai - 2b = 1 \qquad b = -\frac{1}{2} \quad a = 0$$

Esempio di matrice non diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

blocco di Jordan (Camille Jordan, francese)

$p_A(x) = (\lambda - x)^n \qquad m_a(\lambda) = n$

$m_g(\lambda) = ?$

$Aut(\lambda) = \ker(A - \lambda E_n)$

$$A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rango $n-1$

$\Rightarrow \dim Aut(\lambda) = n - (n-1) = 1 = m_g(\lambda)$

$Aut(\lambda)$ ha equazioni $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.

Def. 1) $f: V \to V$ è triangolarizzabile se esiste una base B t.c. $M_B(f)$ sia triangolare superiore.

2) Analogamente A $n \times n$ è triangolarizzabile se è simile a una matrice triangolare.

Teorema

$f: V \to V$ è triang. $\Longleftrightarrow$ $p_f(x)$ è un prodotto di fattori lineari.

Dim.

Sia f triang. $\Rightarrow \exists$ base B tale che $M_B(f)$ sia triangolare $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$p_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$.

Vicev. per induz. su $n = \dim V$.

Per $n = 1$ ovvio.

Supp. vero per matrici di ordine $n-1$, e dimostriamo per n.

Per ip. $p_f(x)$ è prodotto di fattori lineari, allora $\exists$ un autovalore λ; sia $v_1 \neq 0$ un suo autovettore: $f(v_1) = \lambda v_1$.

Prolungo a una base di V: $B = (v_1, w_2, \dots, w_n)$

Considero $W = \langle w_2, \dots, w_n \rangle$. Se $w \in W$,

$$f(w) = \mu_1 v_1 + \underbrace{\mu_2 w_2 + \dots + \mu_n w_n}_{:= g(w)}$$

B è base

così def. $g: W \to W$ lineare

$$A = M_B(f) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{B'}(g) & \\ 0 & & & \end{array} \right) \\ f(v_1)\ f(w_2) \dots f(w_n) \end{array}$$

dove $B' = (w_2, \dots, w_n)$ base di W

Sia $A' = M_{B'}(g)$

Allora $p_f(x) = \det(A - xE_n) = (\lambda - x) \det(A' - xE_{n-1}) =$

$= (\lambda - x)\, p_{A'}(x) = (\lambda - x) \underbrace{p_g(x)}$.

è prod. di fattori lineari perché lo è p_f per ipotesi

$\Rightarrow$ per ip. induttiva g è triangolarizzabile cioè $\exists\ v_2, \dots, v_n$ base di W risp. a cui la matrice di g è triangolare.

Allora $M(f)$ è triang. risp. alla base $v_1, v_2, \dots, v_n$.

■

Corollario del Teor. + Teor. fond. dell'algebra

Ogni matrice quadrata su $\mathbb{C}$ è triangolarizzabile.

Forma normale di Jordan.

È una forma canonica, ossia un rappresentante canonico per la classe di similitudine di una matrice quadrata; oppure per la matrice di un endomorfismo.

Questa parte è senza dimostrazioni:

Sia $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo t.c.
$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} (\lambda_2 - x)^{a_2} \dots (\lambda_m - x)^{a_m}$:

ha tutte le radici in K, f è triangolabile (per es. qualunque endom. su $\mathbb{C}$)

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono gli autovalori distinti

$a_i = m_a(\lambda_i)$. Inoltre $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Sia λ un autovalore : $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.
$Aut(\lambda) = Ker(f - \lambda\, id_V)$.

Oss. $\forall$ endom. g si ha:
$Ker(g) \subseteq Ker(g^2) \subseteq \dots \subseteq Ker(g^k) = Ker(g^{k+1}) = \dots$

$g(v) = 0 \Rightarrow g^2(v) = g(g(v)) = g(0) = 0$, ecc.

Se $Ker(g^k) = Ker(g^{k+1})$ e $v \in Ker\, g^{k+2} \Rightarrow$

$0 = g^{k+2}(v) = g^{k+1}(g(v)) = g(g^{k+1}(v)) \Rightarrow g(v) \in Ker\, g^{k+1} =$

$= \ker g^k \Rightarrow g^k(g(v)) = 0 = g^{k+1}(v) \Rightarrow v \in \ker g^{k+1}$!

Quindi $\ker(g) \subsetneq \ker(g^2) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(g^k) = \ker(g^k) = \dots$ per un certo k.

Consid. il caso $\boxed{g = f - \lambda\, id_V.}$

Allora si ha (senza dim.)

AUTOSPAZI GENERALIZZATI DI T

$$
\begin{aligned}
Aut(\lambda) = \ker(f - \lambda\, id_V) &= Aut_1(\lambda) \\
\cap\!\!\!\neq \quad & \text{se } m_g(\lambda) < m_a(\lambda) \\
\ker((f - \lambda\, id_V)^2) &= Aut_2(\lambda) \\
\cap\!\!\!\neq \quad & \text{se } \dim Aut_2(\lambda) < m_a(\lambda) \\
\ker((f - \lambda\, id_V)^3) &= Aut_3(\lambda) \\
\vdots \quad & \\
\cap \quad & \\
\ker((f - \lambda\, id_V)^a) &= Aut_a(\lambda)
\end{aligned}
$$

dove $a = m_a(\lambda)$

L'ultimo si ottiene per esponente $\leq m_a(\lambda)$ e ha dim $m_a(\lambda)$; poi sono tutti uguali.

Si ha:

Prop.

$$V = Aut_{a_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus Aut_{a_m}(\lambda_m)$$

somma diretta degli autospazi generalizzati.

Def. un blocco di Jordan relativo all'autovalore λ è una matrice della forma $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

(oppure triang. sup.). Se rappresenta f risp. a $(v_1, \dots, v_n)$

$f(v_1) = \lambda v_1 + v_2$ $\qquad$ $(f - \lambda\, id)(v_1) = v_2$

$f(v_2) = \lambda v_2 + v_3$ $\qquad$ $(f - \lambda\, id)(v_2) = (f - \lambda\, id)^2(v_2) = v_3$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

$f(v_n) = \lambda v_n$ $\qquad$ $(f - \lambda\, id)(v_{n-1}) = (f - \lambda\, id)^{n-1}(v_1) = v_n$

Teorema Forma normale di Jordan.

$f: V \to V$ endom., $\dim_K V = n$

$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} \cdots (\lambda_m - x)^{a_m}$.

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V, unione di basi degli autospazi generalizzati $Aut_{a_i}(\lambda_i)$, tale che

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}$$ dove ogni

J_i è un blocco di Jordan relativo a uno degli autovalori.

Inoltre:

1) la forma normale di J. è unica a meno di permutazione dei blocchi.

2) il numero di blocchi di λ_i è $m_g(\lambda_i)$.

— · —

Per costruire una base di Jordan per $Aut_{a_i}(\lambda_i)$ si può procedere così:

$Aut(\lambda)$: base $w_1, \dots, w_{b_1}$ $\quad b_1 = m_g(\lambda)$

$\cap$

$Aut_2(\lambda)$: base $w_1, \dots, w_{b_1} | w_{b_1+1}, \dots, w_{b_2}$ $\quad b_2 = \dim Aut_2(\lambda)$

$\cap$

$\vdots$

dice $\leq a$ $\quad Aut_a(\lambda)$: base $w_1 \dots w_{b_1} | \dots | \dots | \dots | w_{b_a} |$

$g^{a-1}(w_{b_a})$

$\vdots$

$g^2(w_{b_a})$

$g(w_{b_a})$

w_{b_a}

Questa non va ancora bene: ora prendo $w_{b_a}, g(w_{b_a}), g^2(w_{b_a}) \dots g^{a-1}(w_{b_a})$: otteniamo

negli autosp. generalizzati precedenti:
li chiamo $v_1, v_2, \dots, v_a$: primi vettori di base; poi faccio lo stesso a partire dai w precedenti, contemporaneamente togliendo in ogni riga tanti vettori quanti ne ho aggiunto. $v_1 \dots v_a$ danno il primo blocco

~~Esempi~~ In effetti se il blocco è $\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \lambda \\ & & \ddots 1 & \lambda \end{pmatrix}$

ciò significa : $f(v_1) = \lambda v_1 + v_2 \qquad (f - \lambda id)(v_1) = v_2$

$f(v_2) = \lambda v_2 + v_3 \qquad (f - \lambda id)(v_2) = v_3$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$f(v_a) = \lambda v_a$.

Esempio

1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; sia $B = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(x) = -(x-2)^3$, $m_A(2) = 3$

$Aut(2) = \ker(B)$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg(2) \Rightarrow$

$\dim Aut(2) = 3 - 2 = 1 < 3$: non diag., un blocco di J.

$Aut(2)$: $x_2 = -x_3$

$x_1 = -2x_2 - x_3 = x_3 \qquad (x_3, -x_3, x_3) =$

$= x_3(1, -1, 1)$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $Aut_2(2)$: $x_2 = -x_3$

$(x_1, -x_3, x_3) = x_1(1,0,0) + x_3(0,-1,1)$

$B^3 = B B^2 = 0 \Rightarrow Aut_3(2) = V = K^3$

$(1,-1,1) \mid (e_1 \quad Be_1 = (1,-1,1)$

$\uparrow B$

$(1,-1,1) \mid (1,0,0)$

$(1,-1,1) \mid (1,0,0) \mid (0,1,0) = e_2$

e_1, Be_1 base

$e_2, B(e_2) = (4,-2,2), B^2(e_2)$

(2) $(1,-1,1)$

(2)

$_3(2)$ $(1,-1,1) \mid (0,-1,1)$

$(1,-1,1) \mid (0,-1,1) \mid (0,0,1) = e_3$ $\quad v_1$

$(3,-1,1)$ v_2 $\quad \uparrow Be_3$

$(2,-2,2)$ v_3 $\quad \uparrow B^2 e_3$

base di Jordan

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = M^{B}_{E}(id_V) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$S^{-1} B S = M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = A - 2E_3$$

$$S^{-1} A S = S^{-1}(B + 2E_3) S = S^{-1} B S + 2E_3 =$$

$\boxed{SA = JS}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = J$$ blocco di Jordan

(2) $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \quad m_a(2) = 2$

$\lambda_2 = 3 \quad m_a(3) = 2$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ $\quad B = A - 2E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$rk\, B = 3 \Rightarrow m_g(2) = 4 - 3 = 1$: un blocco di J.

$\boxed{\lambda_1 = 3}$ $\quad \cancel{B} = A - 3E_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rk = 3$

$m_g = 1$

1 blocco

$\Rightarrow$ forma norm. di J. di A è

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = J$$

S ? tale che $SAS^{-1} = J$?

$Aut(2) = \langle (1,0,0,0) \rangle$ $\qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\cap$

$Aut_2(2) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

$(1,0,0,0) \qquad (-1,0,0,0)\ v_2$

$\uparrow Be_2$

$(1,0,0,0) \mid (0,1,0,0) \quad v_1$

$Aut(3) = \langle (1,0,1,0) \rangle$ $\qquad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\cap$

$Aut_2(3) = \langle (1,0,1,0), (-2,1,0,1) \rangle$

$x_2 = x_4$

$x_1 = -2x_2 + x_3 =$

$= -2x_4 + x_3$

$(x_3 - 2x_4, x_4, x_3, x_4) =$

$= x_3(1,0,1,0) +$

$x_4(-2,1,0,1)$

$(1,0,1,0) \qquad (1,0,1,0)\ v_4$

$\uparrow C$

$(1,0,1,0), (-2,1,0,1) \quad v_3$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M^{B}_{\mathcal{E}}(id)$$

$$S^{-1}AS = M_B(L(A)) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{O}} \\ 1 & 2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{O}} & 3 & 0 \\ & & 1 & 3 \end{array}\right) = J$$

Verifica:

$$\boxed{AS = SJ}$$

Esempio (3) $\quad A \quad n \times n$

λ autovalore con $m_a(\lambda) = 4$

$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

ci sono le seguenti possibilità:

a) $\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ 4 blocchi di J, se $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

b) $\left(\begin{array}{c|c|cc} \lambda & & & \\ \hline & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & 0 \\ & & 1 & \lambda \end{array}\right)$ 3 blocchi di J. se $m_g(\lambda) = 3$

c) 2 blocchi: $m_g(\lambda) = 2$, due possibilità:

c1) $\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & & \\ \hline & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$

c2) $\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & & \\ \hline & & \lambda & 0 \\ & & 1 & \lambda \end{array}\right)$

bisogna fare i conti

d) 1 blocco se $m_g(\lambda) = 1$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \mathbf{O} \\ 1 & \lambda & & \\ 0 & 1 & \lambda & \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

$m_a(2) = 4$

$m_g(2) = 2$ perché

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rg 2

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$ $\dim \operatorname{Ker} B^2 = 4$

Ker B : $(1,0,0,0)$, $(0,1,1,0)$
nt

$e_1 \quad\quad (0,1,1,0)$

$B \uparrow \quad\quad \uparrow$

Ker B^2: $(1,0,0,0)$, $(0,1,1,0)$ | e_3, e_4 2 blocchi

Base di J.: $e_3, e_1, e_4, (0,1,1,0)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^{-1}AS = J = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & & \\ 1 & 2 & & 0 \\ \hline & & 2 & 0 \\ 0 & & 1 & 2 \end{array}\right)$$

oppure potevo accoppiare i primi 2 con gli ultimi 2 vettori di base.

Ricapitolando, una base di Jordan si costruisce facendo l'unione di opportune basi una per ogni autospazio generalizzato $\mathrm{Aut}_{a_i}(\lambda_i)$, dove a_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

Dapprima, per ogni λ_i, si costruisce una base di $Aut_{a_i}(\lambda_i)$ a partire da una base di $Aut(\lambda_i)$, poi la si completa a una di $Aut_2(\lambda_i)$, e questa a una base di $Aut_3(\lambda_i)$, e così via, finché si arriva al primo di dimensione a_i.

$Aut(\lambda_i)$ $\quad w_1, \ldots, w_{b_1}$ $\quad$ con $b_1 = m_g(\lambda_i)$

$\cap +$

$Aut_2(\lambda_i)$ $\quad w_1 \ldots w_{b_1} | w_{b_1+1}, \ldots, w_{b_2}$ $\quad$ con $b_2 = $ dim $Aut_2(\lambda_i)$

$\cap +$

$\vdots$

$\cap +$

$Aut_{a_i}(\lambda_i)$ $\quad w_1 \ldots w_{b_1} | w_{b_1+1}, \ldots w_{b_2} | \ldots \ldots | \ldots w_{a_i}$

$(a \leq a_i)$

Ora si modifica questa base di $Aut_{a_i}(\lambda_i)$ cominciando in basso a destra:

si considera $w_{a_i}, g(w_{a_i}), g^2(w_{a_i}), \ldots, g^{a-1}(w_{a_i})$

appartiene all'ultimo $\quad$ appartiene al penultimo

così si risale via via di uno; questi vettori sono linearmente indipendenti; li chiamo $v_1, v_2, \ldots, v_a$.

Da ogni riga tolgo un w in modo che che $v_1, \ldots, v_a$ con i w rimanenti siano ancora una base di $Aut_a(\lambda_i)$.

Questi a vettori $v_1, \ldots v_a$ danno il primo

blocco di Jordan.
Ora considero il w precedente a w_{a_i}, diverso dai $v_1, \ldots, v_a$; ripeto il procedim. applicandogli g più volte fino ad arrivare alla prima riga. Così ottengo il secondo blocco di Jordan. Ecc.
Avrò tanti blocchi quanti sono $w_1, \ldots, w_{b_s}$, perché ogni blocco corrisponde ad un autovettore.