ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 9

Trieste, 15 dicembre 2017

1. Delle seguenti matrici, dire quali sono in forma normale di Jordan, e quali non lo sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

2. (i) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata a coefficienti in K, e sia $A(x)$ la matrice che al posto d'indici i, j ha $a_{ij} - x$, dove x è un'indeterminata. Dimostrare che il determinante di $A(x)$ è un polinomio della forma $p(x) = \alpha x + \beta$, con coefficienti $\alpha, \beta \in K$, e che β è uguale al determinante di A. (Suggerimento: operare con trasformazioni elementari non di Gauss sulle righe di A).

(ii) Sia $a \neq b$. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & a & \dots & a \\ b & b & \lambda_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & b \end{pmatrix}.$$

(Suggerimento: applicare la parte (i), e poi porre $x = a$ e $x = b$.)

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alle basi canoniche di dominio e codominio, è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 2t-1 & t & t \end{pmatrix}$.

(i) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori di f sono tutti reali, specificando i casi in cui ci sono autovalori di molteplicità algebrica maggiore di 1.

(ii) Si determini per quali valori di t la matrice M è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.