# Psicometria 1 (023-PS)

Michele Grassi
mgrassi@units.it

Università di Trieste

Lezione 15 16

# Piano della presentazione


1. Inferenza su una media
2. Distribuzioni $t$ di Student
3. R e le distribuzioni $t$ di Student
4. Intervallo di confidenza
5. Test $t$ di Student
6. Test $t$ di Student con R
7. Condizioni di validità
8. Campioni dipendenti
9. Due campioni indipendenti
10. Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

# Inferenza su una media

# $\sigma^2$ ignota

- Abbiamo imparato ad utilizzare la procedura classica dell'inferenza statistica sulla media $\mu$ della popolazione nel caso in cui la deviazione standard $\sigma$ della popolazione sia conosciuta.
- Tale procedura fa uso del fatto che la media del campione $\bar{y}$ segue approssimativamente la distribuzione $N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
- Indipendentemente dalla distribuzione della popolazione, tale approssimazione diventa via via più accurata al crescere della numerosità $n$ del campione (teorema del limite centrale).
- Se la popolazione è normale, ovvero se $Y \sim N(\mu; \sigma)$, allora $\bar{y} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ anche se $n$ è piccolo.

# $\sigma^2$ ignota

- Quando la media della popolazione ($\mu$) non è nota, di norma anche la sua varianza ($\sigma^2$) è ignota; di conseguenza, dobbiamo usare la varianza del campione ($s^2$) per stimare la varianza della popolazione.
- Con $\sigma^2$ ignota ed il ricorso all'uso di $s^2$ in sua sostituzione, la distribuzione delle probabilità non è più fornita dalla distribuzione normale $Z$ ma da quella del $t$, detta $t$ di Student, dallo pseudonimo di William Sealy Gosset.

# $\sigma^2$ ignota

- Ci porremo ora l'obiettivo di usare la distribuzione $t$ di Student per confrontare

  una media osservata e una media attesa, con calcolo dei limiti di confidenza di una media;

  le medie di due campioni indipendenti, con calcolo dei limiti di confidenza della media delle differenze;

  le medie di due campioni dipendenti, o per dati appaiati, con intervallo di confidenza della media delle differenze.

# $\sigma^2$ ignota

- Benchè le medie dei campioni $\bar{y}$ siano distribuite normalmente con media $\mu$ e deviazione standard $\sigma/\sqrt{n}$, non possiamo fare uso di questo fatto dato che il parametro $\sigma$ è ignoto.
- Possiamo però stimare la deviazione standard di $\bar{y}$ usando la deviazione standard del campione $s$ in luogo del parametro sconosciuto $\sigma$.

La risultante deviazione standard stimata di $\bar{y}$ viene chiamata errore standard stimato di $\bar{y}$:

$$\widehat{\sigma}_{\bar{y}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

# Terminologia

- Il parametro $\sigma/\sqrt{n}$ è chiamato errore standard di $\bar{y}$;
- La statistica $s/\sqrt{n}$ è chiamata l'errore standard stimato di $\bar{y}$.

# $\sigma$ nota

Quando la deviazione standard $\sigma$ della popolazione è nota, la verifica delle ipotesi e gli intervalli di confidenza per $\mu$ sono basati sulla media standardizzata del campione:

$$z_{=} = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

dove $z_0 \sim N\,(0,\ 1)$.

# Indice statistico

Quando $\sigma$ è ignota, si calcola l'analoga statistica:

$$t_0 = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

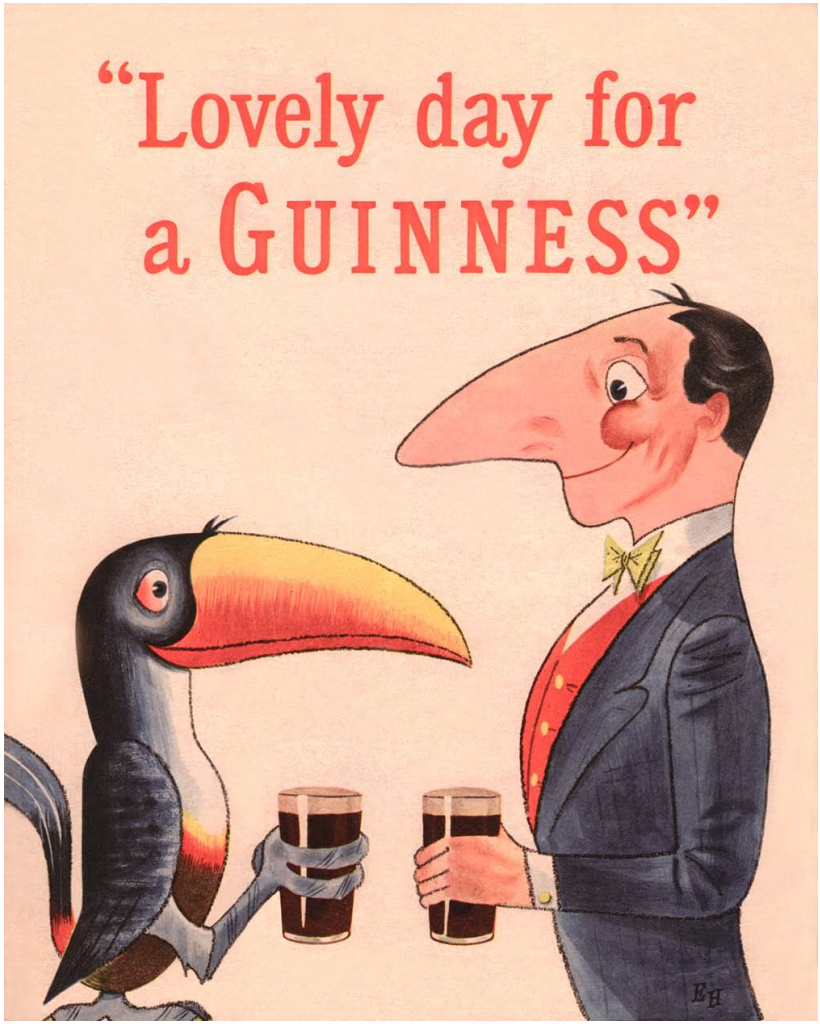
ma questa statistica non segue la distribuzione normale.

Se i valori $Y$ sono distribuiti normalmente, allora la statistica $t_0$ seguirà la distribuzione $t$ di Student con $n - 1$ gradi di libertà:

$$t_0 \sim t\,(n-1)$$

# Distribuzioni $t$ di Student

# Distribuzioni $t$ di Student




VOLUME VI MARCH, 1908 No. 1

BIOMETRIKA.

## THE PROBABLE ERROR OF A MEAN.

BY STUDENT.

*Introduction.*

ANY experiment may be regarded as forming an individual of a "population" of experiments which might be performed under the same conditions. A series of experiments is a sample drawn from this population.

Now any series of experiments is only of value in so far as it enables us to form a judgment as to the statistical constants of the population to which the experiments belong. In a great number of cases the question finally turns on the value of a mean, either directly, or as the mean difference between the two quantities.

If the number of experiments be very large, we may have precise information

# Distribuzioni $t$ di Student

- Le proprietà della distribuzione $t$ sono particolarmente utili nello studio di fenomeni casuali relativi a piccoli campioni di osservazioni, cioè quando l'ampiezza di $n < 30$.
- La variabile casuale $t$ è definita come rapporto tra una variabile casuale normale standardizzata e la radice quadrata di una variabile $\chi^2$ (*che studieremo*) divisa per i suoi gradi di libertà, *ammesso che le due variabili siano tra loro indipendenti*.
- Anticipiamo il seguente fatto, *che studieremo*:

$$\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right) s^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$$

ossia, la varianza campionaria corretta $s^2$ ha una distribuzione campionaria $\chi^2$ con $\nu = n - 1$ gradi di libertà.

# Distribuzioni $t$ di Student

- Abbiamo detto che la variabile aleatoria $t$ viene espressa dal seguente rapporto

$$t_{(\nu)} = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(\nu)}}{\nu}}},$$

- che possiamo costruire con le quantità note

$$t_{(n-1)} = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\sigma^2}/\,(n-1)}} = \frac{\bar{y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \times \frac{\sigma}{s} = \boxed{\frac{\bar{y}-\mu}{s/\sqrt{n}}}$$

- dato che media e varianza campionaria sono tra loro indipendenti[1]

[1] $(y_i - \bar{y})$ è indipendente da $\bar{y}$: infatti se $\bar{y} + a \rightarrow [(y_i + a) - (\bar{y} + a)] = [y_i + \cancel{a} - \bar{y} - \cancel{a}]$

# Distribuzioni $t$ di Student

- Il rapporto ottenuto non dipende più dalla deviazione standard $\sigma$ della popolazione e può essere interpretato coma la standardizzazione della media campionaria $\bar{Y}$, che diviene $t$ Student, e tale sostituzione comporta una maggiore incertezza circa il valore di $\mu$.
- La distribuzione $t$ può quindi essere usata per compiere inferenze sulla media $\mu$ della popolazione usando esclusivamente valori campionari, quali $\bar{Y}$, $s^2$ ed $n$.

# Distribuzioni $t$ di Student

- La funzione di densità di probabilità $t$

$$f(t) = C\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

viene specificata dalla costante $C$, che rende l'area totale sotto la curva uguale ad uno, naturalmente dai valori $t$ e sopratutto dal numero di gradi di libertà $\nu$

- ha valore atteso $E(t) = 0$, come nella normale standard, dal momento che il valore $f(t)$ decresce simmetricamente attorno a tale valore:

$$f(t = 0) = C/\sqrt{1^{(\nu+1)}} > f(\mathbf{t = -1}) = C/\sqrt{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{(\nu+1)}}$$

$$f(t = 0) = C/\sqrt{1^{(\nu+1)}} > f(\mathbf{t = 1}) = C/\sqrt{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{(\nu+1)}}$$

# Distribuzioni $t$ di Student

- mentre la varianza (per $\nu > 2$) dipende dal numero di gdl $\nu$ ed è data da

$$Var(t) = \frac{\nu}{\nu - 2},$$

che tende ad $1$ (il valore della normale standard) al crescere di $\nu$:

$$\frac{3}{1} = 3, \quad \frac{5}{3} = 1.67, \quad \frac{15}{13} = 1.15, \quad \frac{30}{28} = 1.07, \quad \frac{100}{98} = 1.02,$$

- Le curve $t$ sono tutte *campanulari* e *simmetriche*. Quelle che hanno un $\nu$ piccolo sono notevolmente più appiattite di quella normale , ma al crescere di $\nu$ la distribuzione di Student tende alla distribuzione normale

# Distribuzioni $t$ di Student

I gradi di libertà sono dati dal denominatore della deviazione standard $s$ del campione:

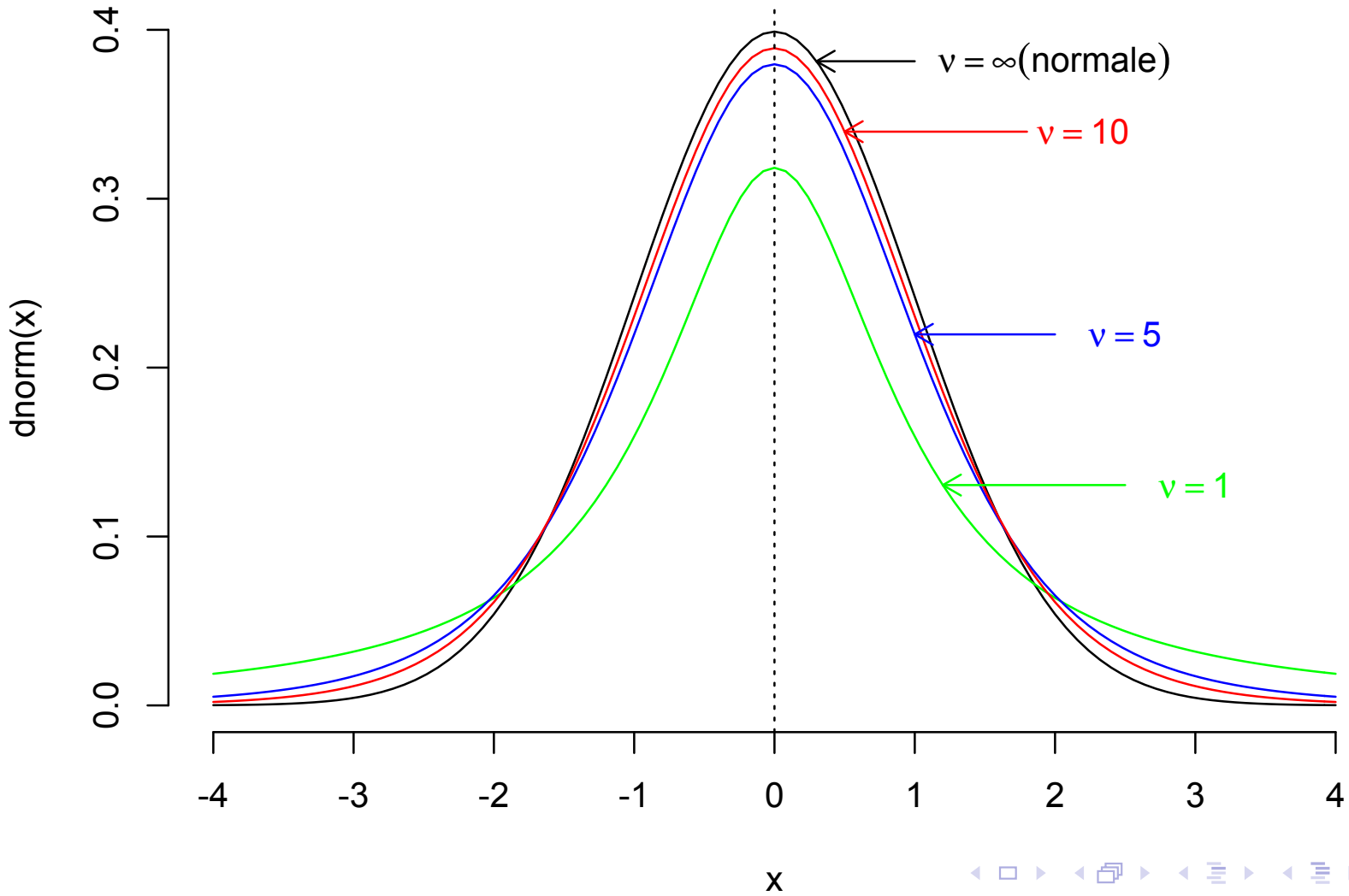
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

All'aumentare di $n$, $s$ diventa via via una stima sempre migliore di $\sigma$ e si ha la convergenza dei valori della distribuzione $t$ di Student verso la distribuzione normale standardizzata.

# Distribuzioni $t$ di Student

- La forma della distribuzione $t$ di Student è simmetrica e a campana come la normale, ma con una dispersione maggiore.
- Ciò riflette l'incertezza aggiuntiva che deriva dal fatto che il parametro $\sigma$ è stato stimato mediante $s$.

# Distribuzioni $t$ di Student



# R e le distribuzioni $t$ di Student

# R e le distribuzioni $t$ di Student

- R offre le seguenti funzioni per le distribuzioni $t$:

```
dt(x, df, ncp, log = FALSE)
pt(q, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qt(p, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rt(n, df, ncp)
```

- La funzione `dt(x, df)` restituisce la densità di una distribuzione $t$ con $df$ gradi di libertà (`degree of freedom`).

```
 dt(0,df=100)
## [1] 0.3979462
```

- Per i nostri scopi, la densità verrà usata soprattutto per creare dei grafici.

# pt(q, df)

- La funzione `pt(q, df)` restituisce la probabilità cumulativa nell'intervallo $[-\infty;\ q]$ di una funzione $t$ con $df$ gradi di libertà.

```
 pt(1.372,10)
## [1] 0.8999723
 1 - pt(1.372,10)
## [1] 0.1000277
 1 - pt(2.228,10)
## [1] 0.02500589
```

**Illustrazione.** Si trovi l'area compresa tra $1.00$ e $1.50$ per una distribuzione $t$ con $15$ gradi di libertà.

```
 pt(1.5, 15) - pt(1.0, 15)
## [1] 0.08940174
```

# qt(p, df)

- La funzione `qt(p, df)` restituisce il valore della variabile $t$ con $df$ gradi di libertà a cui è associata la probabilità $p$ nell'intervallo $[-\infty;\ t]$.

```
 qt(0.025, 5)
## [1] -2.570582
 qt(0.975, 5)
## [1] 2.570582
 qt(0.975, 25)
## [1] 2.059539
 qt(0.975, 100)
## [1] 1.983972
```

**Illustrazione.** Si trovi il valore $t_20$ a cui è associata una probabilità $p = 0.25$ nell'intervallo $[t; \infty]$.

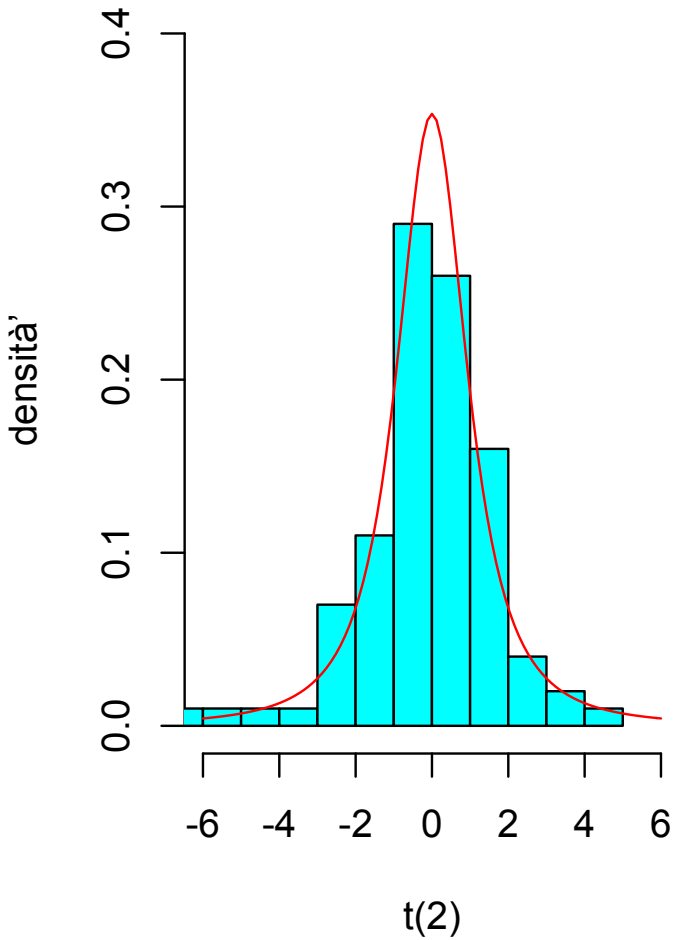
```
 qt(0.75, 20)
## [1] 0.6869545
```

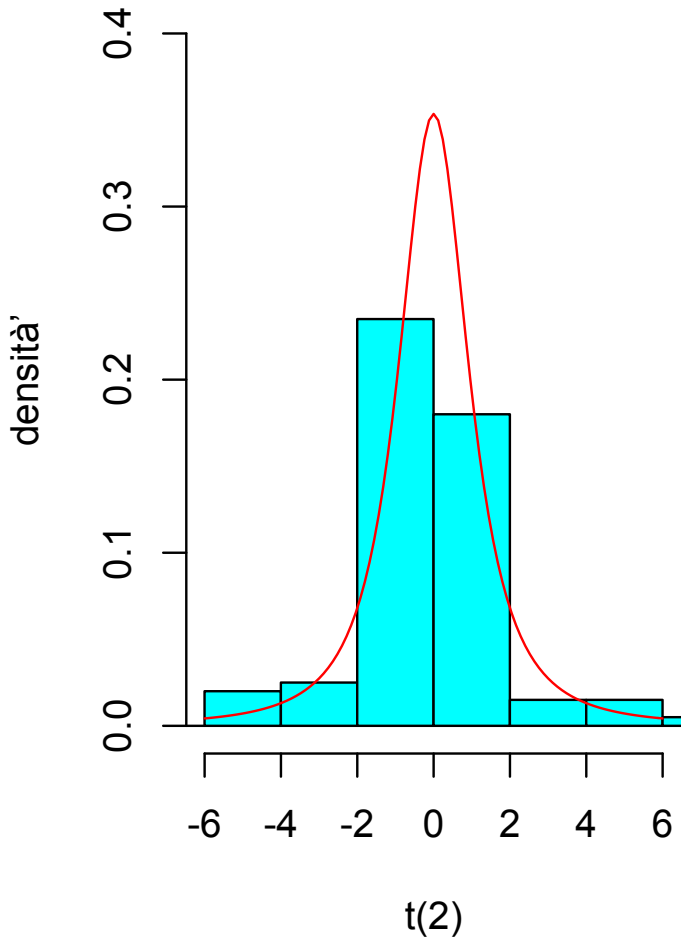
# rt(n, df)

- La funzione `rt(n, df)` restituisce un campione casuale di dimensioni $n$ da una distribuzione $t$ con $df$ gradi di libertà.
- Le figure seguenti, per esempio, sono state create con il comando:

```
rep=100
df=2
x<-rt(rep,df)
truehist(x,xlim=c(-6, 6),ylim=c(0, 0.4),xlab=c("t(2)"),
            ylab=c("densità'"))
curve(dt(x, df), add=TRUE, col="red")
```

# rt(n, df)


densità'
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-6
-4
-2
0
2
4
6
t(2)


densità'
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-6
-4
-2
0
2
4
6
t(2)

# Intervallo di confidenza

# Intervallo di confidenza

- Gli intervalli di confidenza e i test delle ipotesi statistiche basati sulla distribuzione $t$ di Student sono molto simili a quelli basati sulla distribuzione normale.
  - Anziché usare i valori critici della distribuzione normale, però, dobbiamo usare i valori critici $t$.
  - Questi valori possono essere trovati usando la tabella B del testo per i diversi valori dei gradi di libertà oppure le funzioni R descritte in precedenza.

# Intervallo di confidenza

**Illustrazione.** Consideriamo nuovamente l'esperimento fittizio discusso in precedenza

- Uno studio di pedagogia sperimentale intende stabilire se l'utilizzo del computer in un corso introduttivo di statistica migliori l'apprendimento.
- Vengono contattati dieci docenti che insegnano un corso introduttivo di statistica presso la Facoltà di Psicologia. Ciascun docente divide in maniera casuale i suoi studenti in due gruppi: un gruppo userà il computer, mentre l'altro gruppo non lo userà.
- A fine corso, lo stesso esame viene somministrato a tutti gli studenti.

# Illustrazione

I due metodi d'insegnamento producono in media una differenza pari a $9.40$ con deviazione standard uguale a $8.38$.

Il punteggio medio all'esame per ciascun gruppo è fornito nella tabella seguente, insieme alla differenza tra i punteggi dei gruppi che hanno utilizzato i due metodi d'insegnamento.

# Illustrazione

| Docente | Metodo computer | Metodo tradizionale | Differenza |
|---|---|---|---|
| 1 | 94 | 71 | 23 |
| 2 | 75 | 70 | 5 |
| 3 | 75 | 58 | 17 |
| 4 | 84 | 80 | 4 |
| 5 | 79 | 70 | 9 |
| 6 | 85 | 67 | 18 |
| 7 | 73 | 66 | 7 |
| 8 | 75 | 80 | -5 |
| 9 | 75 | 72 | 3 |
| 10 | 83 | 70 | 13 |
| | | media | $\bar{x} = 9.4$ |
| | | deviazione standard | $s = 8.38$ |

# Illustrazione

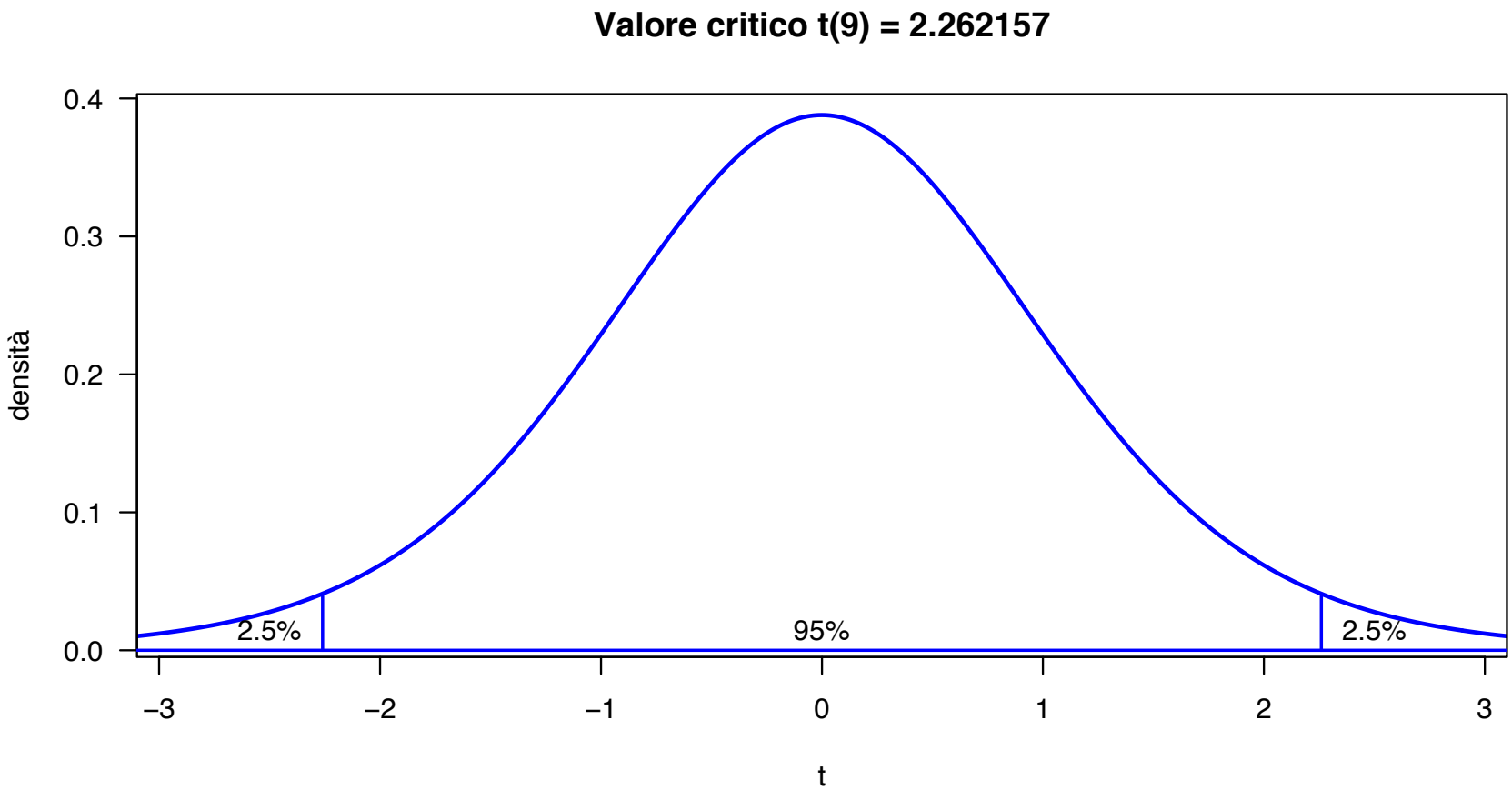
- In precedenza abbiamo analizzato questi dati in maniera inappropriata, fingendo che la deviazione standard $s$ del campione fosse uguale alla deviazione standard $\sigma$ della popolazione.
- Usiamo ora la distribuzione $t$ di Student per costruire l'intervallo di confidenza al $95\%$.
  - Gradi di libertà $\longrightarrow n - 1 = 10 - 1 = 9$.
  - Il valore critico $t = 2.262$ è il valore della distribuzione $t$ con $9$ gradi di libertà alla probabilità $\alpha/2 = 0.025$.
  - Si noti che il valore $t_{(\alpha/2;\, n-1)}$ è più grande del corrispondente valore critico $z = 1.96$, e $t_{(\alpha/2;\, n-1)}$ e produrrà quindi un intervallo di confidenza più grande.

# Illustrazione

- La formula per il calcolo dell'intervallo di confidenza è

$$
\begin{aligned}
I.C.(95\%) = & \quad \bar{y} \pm t_{(\alpha/2;\, n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \\
= & \quad 9.40 \pm 2.262 \frac{8.38}{\sqrt{10}} = 9.40 \pm 5.99
\end{aligned}
$$

# Illustrazione



# Test $t$ di Student

# Test $t$ di Student

- Per verificare l'ipotesi nulla secondo cui il nuovo metodo dà gli stessi risultati di quello tradizionale

$$H_0 : \mu \leq 0$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_a : \mu > 0$$

dobbiamo calcolare la statistica

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

# Test $t$ di Student

**Illustrazione.** Nel caso dell'esempio precedente, la statistica test assume il seguente valore:

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = t = \frac{9.4 - 0}{8.38/\sqrt{10}} = 3.547$$

# Test $t$ di Student

- Sotto l'ipotesi nulla questa statistica segue la distribuzione $t$ di Student con 9 gradi di libertà.
- Dato che l'ipotesi alternativa è un'ipotesi unilaterale che specifica un valore positivo per il parametro $\mu$, dobbiamo trovare il $p-$valore per la coda destra della $t$ di Student con 9 gradi di libertà (gdl).
- Il $p-$valore esatto della statistica test può essere trovato tramite software, ma se dobbiamo usare le tabelle non disponiamo dei valori di probabilità esatti.

# Test $t$ di Student

Con 9 gdl in un test ad una coda, nella tabella troviamo:

| df | $t_{0.100}$ | $t_{0.050}$ | $t_{0.025}$ | $t_{0.010}$ | $t_{0.005}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |

# Test $t$ di Student

- Il valore osservato $t_9 = 3.547$ è maggiore di $t_{(0.005;\, 9)} = 3.250$.
- Il $p-$valore, dunque, sarà minore di $0.005$.
- Questo risultato solitamente si riporta nel modo seguente:

> *il nuovo metodo d'insegnamento produce all'esame punteggi significativamente più alti del metodo tradizionale [*$t(9) = 3.547$, $p < 0.005$, *test a una coda].*

# Test $t$ di Student

- Con un'ipotesi alternativa non-direzionale,

$$H_a : \mu \neq 0$$

il $p-$valore verrebbe raddoppiato:

... *[* $t(9) = 3.547$, $p < 0.01$ , *test a due code]*

# Test $t$ di Student con R

# Test $t$ di Student con R

- Utilizziamo R per eseguire il test t di Student.

```
diff <- c(23, 5, 17, 4, 9, 18, 7, -5, 3, 13)
n <- length(diff)
m <- mean(diff)
m
## [1] 9.4
s <- sqrt(var(diff))
s
## [1] 8.382521
t <- (m - 0)/(s / sqrt(n))
t
## [1] 3.546118
1 - pt(t, 9)
## [1] 0.003126914   # unilaterale
(  1 - pt(t, 9)  )*2
## [1] 0.006253827  # bilaterale
```

# Test $t$ di Student con R

- Oppure, più semplicemente:

```
t.test(diff, alternative="greater")

One Sample t-test

data:  diff
t = 3.5461, df = 9, p-value = 0.003127
alternative hypothesis: true mean is greater than 0
95 percent confidence interval:
 4.54081      Inf
sample estimates:
mean of x
      9.4
```

# Test $t$ di Student con R

- Per un test bilaterale:

```
  t.test(diff, alternative="two.sided")

One Sample t-test

data:  diff
t = 3.5461, df = 9, p-value = 0.006254
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  3.403505 15.396495
sample estimates:
mean of x
      9.4
```

# Condizioni di validità

# Condizioni di validità

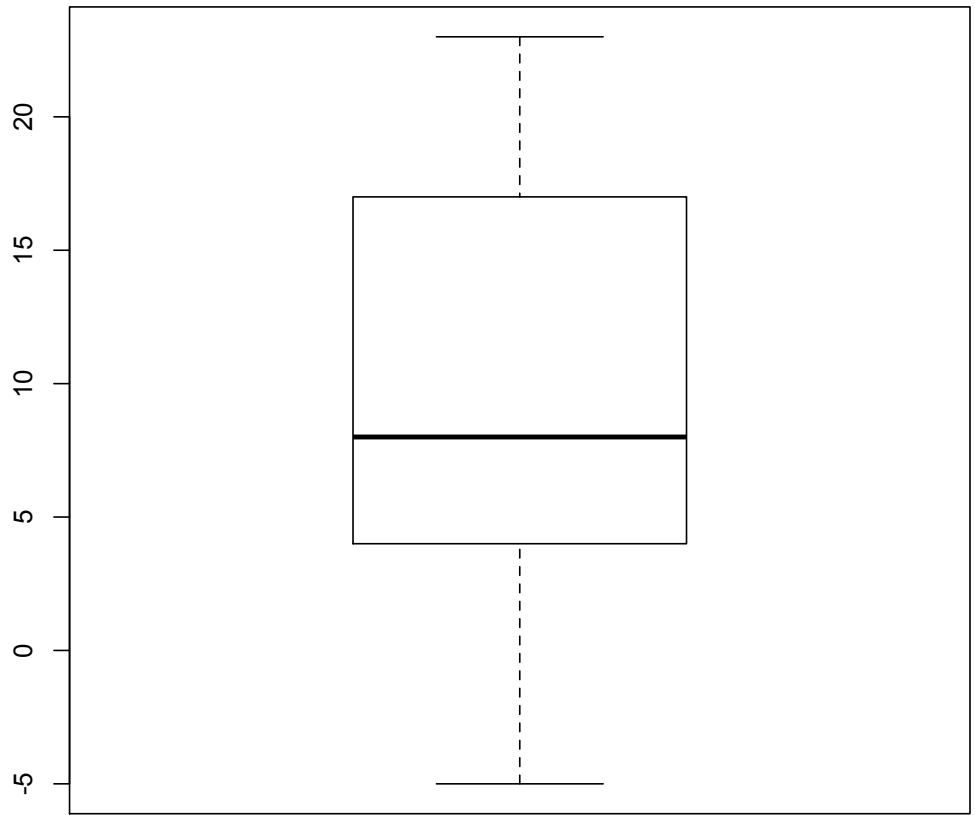
- Affinché possa essere ritenuta valida, l'applicazione del test $t$ di Student richiede che siano rispettate alcune condizioni essenziali, valide anche per l'analisi della varianza, che ne rappresenta la generalizzazione.
- Le ipotesi sono essenzialmente tre:
  **1.** l'indipendenza dei dati entro e tra campioni: i dati provengono da un campione casuale semplice estratto da una popolazione molto più grande;
  **2.** l'omogeneità della varianza: il confronto tra due medie è valido se e solo se le popolazioni dalle quali i campioni sono estratti hanno varianze simili;
  **3.** la normalità: i dati sono distribuiti normalmente.

# Condizioni di validità

- In campioni di piccole dimensioni, i test delle ipotesi e gli intervalli di confidenza basati sulla distribuzione $t$ di Student sono corretti se la popolazione è distribuita normalmente.
- L'assunzione di normalità dovrebbe essere controllata esaminando i dati ma, nel caso di piccoli campioni (dove quest'assunzione è veramente importante), la violazione di questa assunzione è difficile da verificare.
- È però importante verificare l'eventuale presenza di dati anomali (*outliers*).

# Condizioni di validità

Per i dati dell'esempio discusso in precedenza, possiamo dire che "tutto è in ordine".



# Campioni dipendenti

# Campioni dipendenti

- Gli intervalli di confidenza e i test di ipotesi vengono comunemente applicati a dati provenienti da campioni dipendenti.
- L'esperimento fittizio che abbiamo discusso in precedenza fornisce un esempio di dati appaiati: ciascun docente è impegnato con due gruppi di studenti (un gruppo per il metodo tradizionale e uno per il metodo nuovo).

# Campioni dipendenti

- Il piano dell'esperimento sarebbe diverso se vi fossero 20 diversi docenti per i 20 gruppi.
  - In quel caso, a 10 docenti scelti in maniera casuale verrebbe assegnato il nuovo metodo d'insegnamento e ai rimanenti il metodo tradizionale.
  - Sarebbero così definiti due campioni indipendenti.

# Campioni dipendenti

Altri comuni esempi di campioni dipendenti:

- studi che utilizzano un pre-test e post-test;

  potremmo misurare, per esempio, il numero medio $\bar{y}$ di incidenti sul lavoro in $n = 10$ fabbriche prima e dopo l'approvazione di una legge che impone un maggior numero di controlli;

- campionamento di osservazioni naturalmente associate;

  potremmo misurare la differenza del livello di depressione di mariti e mogli che hanno subito un evento traumatico.

  Tale studio è diverso da quello in cui mariti e mogli vengono campionati in maniera indipendente.

# Campioni dipendenti

Il confronto tra le medie di due campioni di osservazioni appaiate è semplice:

l'analisi è applicata ad una nuova serie di dati, quelli risultanti dalle differenze $d_i$ tra i valori delle u.s. di ciascuna coppia.

# Campioni dipendenti

- Nel caso di un test bilaterale, l'ipotesi nulla $H_0$ è che la media $\delta$ della popolazione delle differenze sia uguale a $0$, $H_0 : \delta = 0$, mentre l'ipotesi alternativa $H_a$ è $H_a : \delta \neq 0$.
- In un test unilaterale, l'ipotesi nulla $H_0$ è che la media della popolazione delle differenze sia maggiore o uguale a $0$, $H_0 : \delta \geq 0$, mentre l'ipotesi alternativa $H_a$ afferma che la differenza è minore di $0$, $H_a : \delta < 0$.
- Nel caso opposto, l'ipotesi nulla $H_0$ è che la media della popolazione delle differenze sia minore o uguale a $0$, $H_0 : \delta \leq 0$, mentre l'ipotesi alternativa $H_a$ afferma che la differenza è maggiore di $0$, $H_a : \delta > 0$.

# Campioni dipendenti

La significatività della media delle differenze è verificata con il rapporto

$$t_{n-1} = \frac{\bar{d} - \delta}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

- $\bar{d}$ è la media delle differenze $d = d_1; d_2; \ldots; d_n$, dove ciascuna $d_i$ è lo scarto fra le osservazioni corrispondenti della i-esima unità nei due campioni, ovvero $d_i = y_{1_i} - y_{2_i}$.
- $\delta$ è la differenza media attesa: spesso, ma non necessariamente, è uguale a $0$,
- $s_d$ è la deviazione standard campionaria corretta delle differenze campionarie $d$.
- $n$ è il numero di differenze, corrispondente anche al numero di coppie di dati.

# Campioni dipendenti

- L'intervallo di confidenza della media delle differenze $\bar{d}$ tra i due campioni dipendenti al livello $\alpha$ è calcolato mediante

$$\bar{d} \pm t_{(\alpha/2;\, n-1)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

dove $t_{(\alpha/2;\, n-1)}$ indica il valore della distribuzione $t$ con $n-1$ gradi di libertà alla probabilita $\alpha/2$.

# Due campioni indipendenti

# Due campioni indipendenti

Il confronto tra le medie di due campioni indipendenti rappresenta il caso più comune di analisi di dati empirici. Si procede sulla base delle seguenti assunzioni.

- Due campioni casuali indipendenti sono stati estratti da due popolazioni diverse.

  I campioni appaiati sono un esempio di campioni *dipendenti*.
- Ciascuna popolazione è distribuita normalmente con media e varianza sconosciute.

# Due campioni indipendenti

La seguente notazione verrà usata per descrivere le due popolazioni:

| Popolazione | Variabile | Media | Deviazione standard |
|---|---|---|---|
| 1 | $Y_1$ | $\mu_1$ | $\sigma_1$ |
| 2 | $Y_2$ | $\mu_2$ | $\sigma_2$ |

# Due campioni indipendenti

- Ci poniamo il problema di confrontare le medie delle popolazioni $\mu_1$ e $\mu_2$.
- Possiamo costruire un intervallo di confidenza della differenza media $\mu_1 - \mu_2$, oppure verificare l'ipotesi nulla:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

ovvero

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

# Due campioni indipendenti

Le informazioni fornite dai due campioni sono:

| Popolazione | Dimensione del campione | Media | Deviazione standard |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_1$ | $\bar{y}_1$ | $s_1$ |
| 2 | $n_2$ | $\bar{y}_2$ | $s_2$ |

È naturale usare la differenza $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ per stimare la differenza tra le due medie delle popolazioni, $\mu_1 = \mu_2$.

# Due campioni indipendenti

- Dato che le deviazioni standard $\sigma_1$ e $\sigma_2$ delle due popolazioni sono sconosciute, useremo le deviazioni standard dei campioni $s_1$ e $s_2$ per stimare questi due parametri.
- Per eseguire un test statistico sulla differenza $\mu_1 = \mu_2$ dobbiamo conoscere le proprietà della distribuzione campionaria di $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$.

# Due campioni indipendenti

- Il valore atteso di $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ è $\mu_1 - \mu_2$. La differenza delle medie dei campioni fornisce una stima centrata sul parametro della differenza delle medie delle popolazioni:
  $E(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = E(\bar{y}_1) - E(\bar{y}_2) = \mu_1 - \mu_2$.
- La varianza di $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ è

$$\sigma^2_{\bar{y}_1 - \bar{y}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

e dunque l'errore standard di $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ è

$$\sigma_{\bar{y}_1 - \bar{y}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

# Due campioni indipendenti

- Se le due popolazioni sono distribuite normalmente, allora anche la statistica $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ si distribuirà normalmente.
- Se le deviazioni standard $\sigma_1$ e $\sigma_2$ delle due popolazioni fossero conosciute, potremmo basare l'inferenza statistica sulla distribuzione normale in quanto il valore standardizzato

$$z = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

segue la distribuzione normale, $N\,(0;\ 1)$.

# Due campioni indipendenti

## Viene invece usata la statistica

$$t_\nu = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Se i due campioni casuali semplici provengono da due popolazioni indipendenti distribuite normalmente, allora la statistica precedente segue approssimativamente la distribuzione $t$ con $\nu$ gdl.

# Due campioni indipendenti

I gradi di libertà $\nu$ possono essere calcolati usando l'approssimazione di Welch-Satterthwaite:

$$\nu = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Una stima conservativa di $\nu$ è data dal minore di $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$.

# Intervallo di confidenza

Per costruire l'intervallo di confidenza al livello $1 - \alpha$, si calcola

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \pm t^* \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

laddove $t*$ è l'appropriato valore critico della distribuzione $t$ con gradi di libertà uguali al minore di $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ (o al $\nu$ dell'equazione di Welch-Satterthwaite).

Per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, si calcola la statistica

$$t_\nu = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- Si noti che il numeratore della statistica test deriva da $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - 0$, ovvero, $0$ è il valore ipotizzato per $\mu_1 - \mu_2$.
- Il test sarà a una coda o a due code a seconda che l'ipotesi alternativa sia unilaterale

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{oppure} \quad H_a : \mu_1 < \mu_2$$

o bilaterale

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2$$

# Due campioni indipendenti

**Illustrazione.** Si consideri il seguente esempio basato sui dati contenuti nel *data frame* `Ginzberg`.

- La variabile dipendente (`adjdep`) è il punteggio sulla *Beck self-report depression scale*.
- I soggetti sono stati divisi in due gruppi a secondo del punteggio ottenuto su una scala (`adjsimp`) che misura il *bisogno di vedere il mondo "in bianco e nero"*
- I soggetti con punteggi minori o uguali alla media del campione su questa variabile sono stati assegnati al gruppo *"semplicità = bassa"*; gli altri sono stati assegnati al gruppo *"semplicità = alta"*.

# Due campioni indipendenti

vediamo come ottenere in R questi dati

```
 library(car)
 data(Ginzberg)
 attach(Ginzberg)

 mean(simplicity) ## ==1
## [1] 1

 depressione<-adjdep
 semplicità<-as.factor(ifelse(adjsimp<=1,"bassa","alta"))

 table(semplicità)
## semplicità
## alta bassa
##   36    46
```

# Illustrazione

- Per ciascun gruppo sono state calcolate la media e la deviazione standard dei punteggi sulla *Beck self-report depression scale.*
- I risultati sono i seguenti:

| Depressione | $n$ | $\bar{y}$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| semplicità bassa | 46 | 0.8308 | 0.4433 |
| semplicità alta | 36 | 1.2162 | 0.4901 |

# Illustrazione

```
 mean(depressione[semplicità=="alta"])
## [1] 1.216161
 mean(depressione[semplicità=="bassa"])
## [1] 0.8308309

 sd(depressione[semplicità=="alta"])
## [1] 0.4901233
 sd(depressione[semplicità=="bassa"])
## [1] 0.4433133
```

# Illustrazione

- Il minore di $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ è $36 - 1$=35.
- Il valore critico di $t_{(0.025,\ 35)}$ è $2.0301$.

```
qt(0.975,df=35)
## [1] 2.030108
```

- L'intervallo di confidenza al $95\%$ è :

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \pm t_{(0.025,\ 35)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$(1.2162 - 0.8308) \pm 2.0301 \sqrt{\frac{0.4901^2}{36} + \frac{0.4433^2}{46}}$$

$$= 0.3853 \pm 0.2124 = [0.1729;\ 0.5977]$$

# Illustrazione

- usando l'equazione di Welch-Satterthwaite:

$$\nu = \frac{(0.4901/36 + 0.4433/46)^2}{\frac{(0.4901/36)^2}{35} + \frac{(0.4433/46)^2}{45}} = 71.40065$$

- Il valore critico di $t_{(0.025,\ 71.40065)}$ diventa $\approx 1.9937$.

```
qt(0.975,df=71.40065)
## [1] 1.993749
```

- e l'intervallo di confidenza al $95\%$ di Welch-Satterthwaite risulta essere:

$$(1.2162 - 0.8308) \pm 1.9937\sqrt{\frac{0.4901^2}{36} + \frac{0.4433^2}{46}}$$

$$= 0.3853 \pm 0.2086 = [0.1768;\ 0.5940]$$

con un margine di errore $0.2086 < 0.2124$ legato all'aumento dei gdl da $\nu = 35$ a $\nu \approx 71$

# Illustrazione

- Per verificare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$$

contro l'ipotesi alternativa unilaterale

$$H_a : \mu_1 < \mu_2$$

(individui con punteggi più bassi sulla scala "semplicità" hanno punteggi di depressione più bassi), si calcola

$$t_\nu = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{1.2162 - 0.8308}{\sqrt{\frac{0.4901^2}{36} + \frac{0.4433^2}{46}}} = 3.6832$$

# Illustrazione

- Il valore critico $t$ con $\alpha = 0.05$ per un test unilaterale con $\nu 35$ gdl è

```
qt(0.95,df=35)
## [1] 1.689572
```

- usando il valore critico $t$ di Welch-Satterthwaite con $\nu = 71.40065$, otteniamo un valore critico meno restrittivo

```
qt(0.95,df=71.40065)
## [1] 1.666476
```

- che riduce l'area di protezione dell'ipotesi nulla e aumenta quindi la potenza del test statistico.

# Illustrazione

- Dato che la statistica $t = 3.6832$ osservata è maggiore dei valori critici $t_{35} = 1.689572$ e $t_{\nu=71.40065} = 1.666476$, possiamo rifiutare l'ipotesi nulla secondo cui i due gruppi di individui (con basso e alto bisogno di vedere il mondo "in bianco e nero") hanno lo stesso livello di depressione in media sulla scala Beck.
- Se fosse stata specificata un'ipotesi alternativa bilaterale, i valori critici sarebbero stati

```
 qt(0.975,df=35)
## [1] 2.030108
 qt(0.975,df=71.40065)
## [1] 1.993749
```

# Illustrazione

- Questa analisi si può eseguire in R nel modo seguente

```
t.test(depressione~semplicità, alternative = c("two.sided"),
           mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE)
```

- dove il comando `alternative = c("two.sided")` imposta un test bilaterale, in cui il $p - value = 0.0002223$ verrà moltiplicato per $2$.

```
Welch Two Sample t-test

data:  depressione by semplicità
t = 3.6832, df = 71.401, p-value = 0.0004446
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.1767460 0.5939139
sample estimates:
 mean in group alta mean in group bassa
          1.2161608           0.8308309
```

# Illustrazione

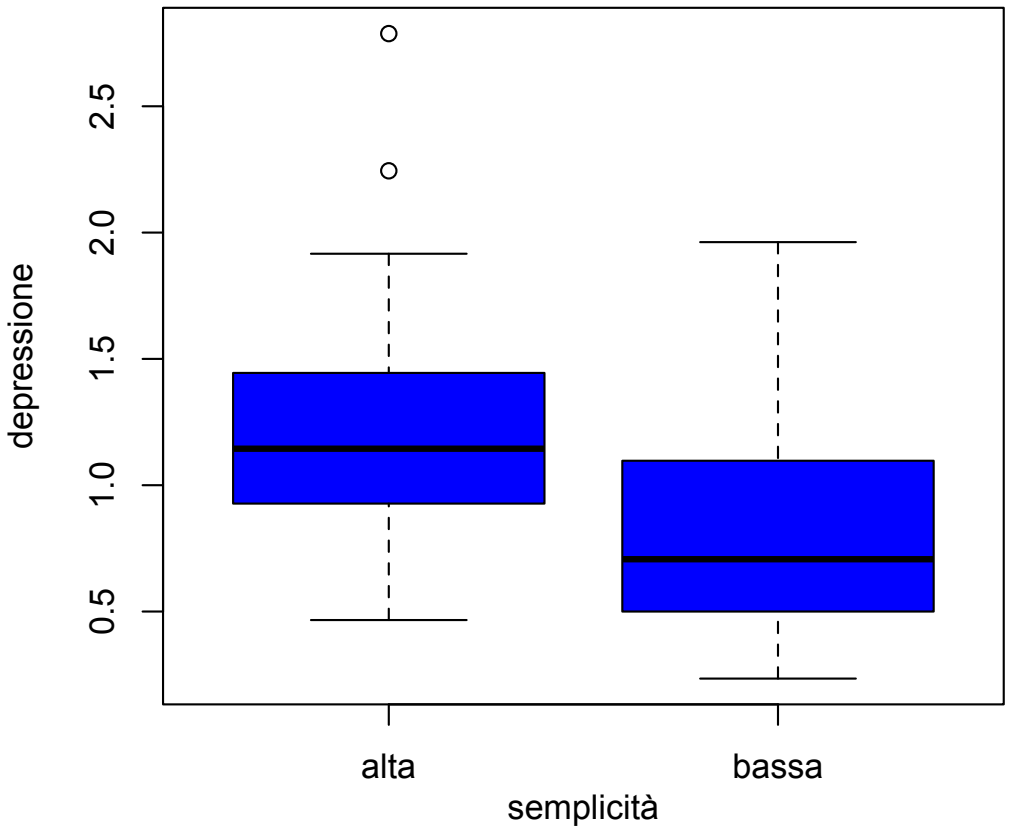
- Invece `alternative = c("greater")` imposta un test unilaterale (destro), in cui il $p - value = 0.0004446$ precedente viene diviso per $2$.

```
t.test(depressione~semplicità, alternative = c("greater"),
          mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE)

Welch Two Sample t-test

data:  depressione by semplicità
t = 3.6832, df = 71.401, p-value = 0.0002223
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.210985      Inf
sample estimates:
 mean in group alta mean in group bassa
         1.2161608           0.8308309
```

# Illustrazione

L'esame grafico dei dati rivela però un potenziale problema:

- ci sono due valori anomali nel gruppo "semplicità alta":



# Illustrazione

Se i due dati anomali vengono eliminati

```
 outlier<-boxplot(depressione~semplicità)$out
 outlier

 posizione<-which(depressione==outlier)
 posizione
## [1] 71 80

 depressione<-depressione[-c(posizione)]
 semplicità<-semplicità[-c(posizione)]
```

# Illustrazione

il test $t$ di Student bilaterale ($p - value \times 2$) diventa:

```
  t.test(depressione~semplicità, alternative = c("two.sided"),
                mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE)

Welch Two Sample t-test

data:  depressione by semplicità
t = 3.361, df = 76.42, p-value = 0.001215
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.1258512 0.4918777
sample estimates:
 mean in group alta mean in group bassa
          1.1396953           0.8308309
```

# Illustrazione

il test $t$ di Student unilaterale (destro) diventa:

```
 t.test(depressione~semplicità, alternative = c("greater"),
              mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE)

Welch Two Sample t-test

data:  depressione by semplicità
t = 3.361, df = 76.42, p-value = 0.0006075
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.1558517       Inf
sample estimates:
 mean in group alta mean in group bassa
          1.1396953           0.8308309
```

# Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

# Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

- Solo nel caso in cui le due popolazioni, da cui sono estratti i due campioni indipendenti di ampiezza $n_1$ e $n_2$, si assumono avere la stessa varianza, allora è possibile definire un test $t$ di Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ gradi di libertà.

$$t_{(n_1+n_2-2)} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\widehat{\sigma}_c^2/n_1 + \widehat{\sigma}_c^2/n_2}} = \boxed{\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\widehat{\sigma}_c\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}}$$

- dove $\widehat{\sigma}_c$ è la stima combinata della varianza unica delle popolazioni, a partire dagli elementi dei due campioni sotto esame:

$$\boxed{\widehat{\sigma}_c = s_c = \sqrt{\frac{(n-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

# Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

- Per i dati del nostro esempio avremo che $s_c$ assume il seguente valore

$$s_c = \sqrt{\frac{(36-1)0.4901_1^2 + (46-1)0.4433^2}{36+46-2}} = 0.4644$$

- i gradi di libertà del test diventano $36 + 46 - 2 = 80$.

# Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

- Il valore critico di $t_{(0.025,\ 80)}$ è $1.9901$.

```
qt(0.975,df=80)
## [1] 1.990063
```

- L'intervallo di confidenza al $95\%$ è :

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \pm t_{(0.025,\ 80)} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$(1.2162 - 0.8308) \pm 1.9901 \times 0.4644 \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{46}}$$

$$= 0.3853 \pm 0.2056 = [0.1797;\ 0.5909]$$

# Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

- L'indice statistico $t_{80}$ diventa

$$t_{80} = \frac{1.2162 - 0.8308}{0.4644\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{46}}} = 3.729$$

il cui $p-$valore (unilaterale e bilaterale) ottenuto con R è

```
 1-pt(3.729,df=80)
## [1] 0.0001787555
 (1-pt(3.729,df=80) )*2
## [1] 0.000357511
```

# Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

- Un $t$ test unilaterale con 80 gradi di libertà si ottiene impostando l'assunzione di omogeneità della varianza nelle due popolazioni da cui sono tratti i dati `var.equal=TRUE`:

```
t.test(depressione~semplicità,alternative=c("two.sided"),
                                    var.equal=TRUE)
```

```
Two Sample t-test

data:  depressione by semplicità
t = 3.729, df = 80, p-value = 0.0003576
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.1796882 0.5909717
sample estimates:
 mean in group alta mean in group bassa
          1.2161608           0.8308309
```

# Due campioni indipendenti con $\sigma$ uguali

- Un $t$ test bilaterale con $80$ gradi di libertà si ottiene impostando l'assunzione di omogeneità della varianza nelle due popolazioni da cui sono tratti i dati: `var.equal=TRUE`:

```
t.test(depressione~semplicità,alternative=c("greater"),
                                    var.equal=TRUE)
```

```
Two Sample t-test

data:  depressione by semplicità
t = 3.729, df = 80, p-value = 0.0001788
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 0.2133689       Inf
sample estimates:
 mean in group alta mean in group bassa
          1.2161608           0.8308309
```

# Robustezza del test $t$ di Student

- Nel caso di campioni con $n > 30$, il test $t$ di Student e gli intervalli di confidenza sono approssimativamente corretti anche se le distribuzioni di partenza sono asimmetriche (e quindi non normali).
- Si dice che il test $t$ di Student è robusto rispetto alla violazione dell'ipotesi di normalità.
- In tali circostanze, però, è più opportuno usare le mediane dei gruppi, anziché le medie, quali misure di tendenza centrale.

# Robustezza del test $t$ di Student

- Il test $t$ di Student e gli intervalli di confidenza, invece, non sono robusti rispetto alla presenza di dati anomali (outliers).
- E' dunque importante stabilire se dati anomali sono presenti e, nel caso, eliminarli seguendo le procedure appropriate.

# Conclusioni

- Il test e l'intervallo di confidenza sulla media di un campione si basano sulla distribuzione t di Student, dato che la deviazione standard $\sigma$ della popolazione è ignota (lo stesso si può dire del confronto tra due medie).

- Dato che $t \to N$ al crescere di $n$, quando i campioni sono grandi, le inferenze basate su $t$ diventano indistinguibili da quelle basate su $z$.

- Se l'intervallo di confidenza della media delle differenze tra campioni contiene il valore $0$, non si può rifiutare l'ipotesi $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ al livello $1 - \alpha$.

# Conclusioni

- Nel caso di due campioni dipendenti, ciascuna osservazione nel primo campione forma una coppia con un'osservazione nel secondo campione. In questo caso, il test $t$ di Student viene applicato alla media delle differenze dei punteggi appaiati.

- L'uso della distribuzione $t$ di Student richiede che i dati provengano da distribuzioni normali.

- L'uso del test $t$ di Student non è appropriato in presenza di dati anomali (outliers).