$\mathbb{A}^n$ spazio affine metrico.
$V = \mathbb{R}^n$ e "φ" $= \langle\, , \rangle_{st}$
$(O, \mathcal{B}_c)$ sistema di rif. cartesiano <u>ortogonale</u>
(infatti $\mathcal{B}_c$ è base ON per $\mathbb{R}^n$ risp. $\langle\, , \rangle_{st}$)

$n = 3$ $\quad \mathbb{A}^3$

$B \subset \mathbb{A}^3$ sia un piano, di equazione cartesiana

(1) $\quad ax + by + cz = d \qquad (a, b, c) \neq \underline{0}$

$P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}^3$ arbitrario. Il significato delle sue coordinate è

$$\overrightarrow{OP} = P - O = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$P(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$ punto generico (= "non specificato")

Pongo

$$u \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \qquad u \neq \underline{0}$$

Allora

$$ax + by + cz = \left\langle \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \right\rangle_{st} = \langle u, \overrightarrow{OP} \rangle_{st}$$

Dunque, l'equazione cartesiana (1) di B significa che

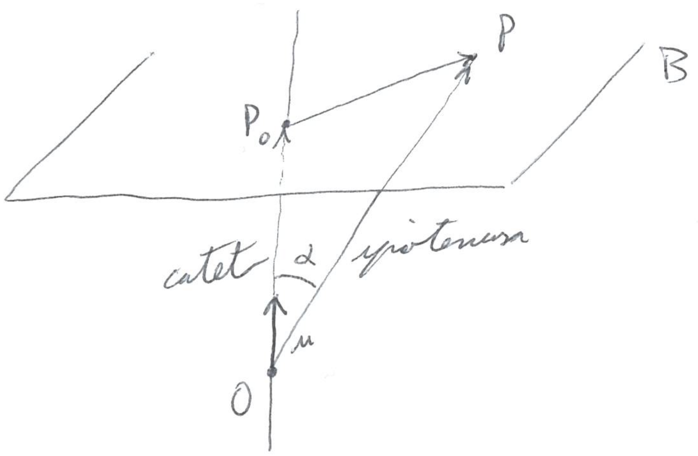
quando P varia su B il prodotto scalare $\langle u, \overrightarrow{OP} \rangle_{st}$ ha valore costante, uguale a d.

Approfondiamo. La giacitura di B ha equazione

(2) $\quad ax + by + cz = 0$ ~~~~

Quindi, se $W \subset \mathbb{R}^3$ è il sottospazio vettoriale generato da u (dunque $\dim(W) = 1$), allora (2) ci dice che

(3) $\qquad T(B) = W^{\perp}$



La retta $S=\{O+\lambda u \mid \lambda\in\mathbb{R}\} = \{O+w \mid w\in W\}$ non è parallela a B. Dunque interseca B in un unico punto, sia P_0

Allora, per ogni $P\in B$ si ha $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}$ con $\underline{\overrightarrow{P_0P}\in T(B)}$

Quindi:

$$\langle u,\overrightarrow{OP}\rangle = \langle u, \overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}\rangle = \langle u,\overrightarrow{OP_0}\rangle + \underbrace{\langle u,\overrightarrow{P_0P}\rangle}_{=0 \text{ per } (3)} = \langle u,\overrightarrow{OP_0}\rangle \overset{\text{def}}{=} d$$

Questo spiega quanto detto sopra.

Osserviamo, inoltre, che il triangolo OP_0P è rettangolo in P_0, per ogni $P\in B$. Quindi

$\underline{d(O,P_0)\le d(O,P)}$ per ogni $P\in B$

spiegare sulla figura ("cateto", "ipotenusa")

Verifichiamolo coi conti:

$$d(O,P)^2=\langle\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP}\rangle=\langle\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P},\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P}\rangle \overset{\text{bilinearità}}{=}$$

$$=\langle\overrightarrow{OP_0},\overrightarrow{OP_0}\rangle+2\underbrace{\cancel{\langle\overrightarrow{OP_0},\overrightarrow{P_0P}\rangle}}_{=0}+\underbrace{\langle\overrightarrow{P_0P},\overrightarrow{P_0P}\rangle}_{\geq 0}\geq$$

$$\geq\langle\overrightarrow{OP_0},\overrightarrow{OP_0}\rangle=d(O,P_0)^2 \implies d(O,P)\geq d(O,P_0)$$

Dunque <u>P_0 è il punto di B alla minima distanza da O</u>.

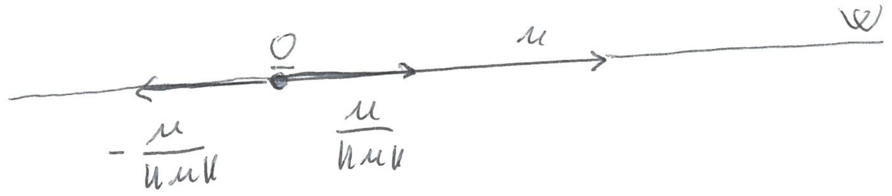
<u>Supponiamo</u> che u sia un versore: $\|u\|=1$.

Questo <u>non</u> è restrittivo perchè l'equazione (1) è definita solo a meno di un fattore di proporzionalità $\neq 0$. Dunque, se $\|u\|\neq 1$ divido la (1) per $\|u\|$. Infatti, per ogni $u\neq 0$ $\frac{u}{\|u\|}=\frac{1}{\|u\|}u$ è un versore.

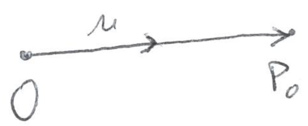
In tal caso si ha:

$$d = \langle u, \overrightarrow{OP_0} \rangle = \underbrace{\|u\|}_{=1} \cdot \|\overrightarrow{OP_0}\| \cos(\alpha) = d(O, P_0) \cos(\alpha)$$

La "magagna" è che nel sottospazio vettoriale W generato da u ci sono <u>due</u> versori



Quindi, se



$\alpha = 0 \qquad \cos(\alpha) = 1$

$\alpha = \pi \qquad \cos(\alpha) = -1$

Comunque possiamo concludere che $\quad |d| = dist(O, P_0)$