Supponiamo sia così. Allora:

2) Se α, β hanno segno uguale $\iff$ $\det(A') > 0$ allora γ ha segno opposto.

La (11) si può riscrivere così:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = -\gamma \Rightarrow \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)x^2 + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)y^2 = 1 \qquad (12)$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} < 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{\gamma} > 0 \quad \text{analogamente} \quad -\frac{\beta}{\gamma} > 0$$

Quindi la (12) si riscrive come

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ e C è un' ellisse

3) Se α, β hanno segni opposti $\iff$ $\det(A') < 0$ allora nella (12) $\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)$ e $\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)$ hanno segni opposti. Per fissare le idee, sia $-\frac{\alpha}{\gamma} > 0$. Allora (12) diventa

$$\underbrace{\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)}_{>0} x^2 - \underbrace{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}_{>0} y^2 = 1 \quad \text{dunque} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e C è un' iperbole

(Se $-\frac{\alpha}{\gamma} < 0$ si trova ancora un' iperbole)

Non vi sono altre possibilità con le ipotesi $\det(A') \neq 0$ e $\det(A) \neq 0$.

Supponiamo, allora: $\det(A') \neq 0$ e $\det(A) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

Allora l' equazione della conica è $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$

4) Se $\det(A') > 0$, allora α, β hanno lo stesso segno e C si riduce ad un punto.

5) Se $\underline{\det(A')<0}$, allora α e β hanno segni opposti.
Per fissare le idee, sia $\alpha>0$ e $\beta<0$. Allora

$$\alpha x^2+\beta y^2 = \underbrace{\alpha}_{>0} x^2 - \underbrace{(-\beta)}_{>0} y^2 = (\sqrt{\alpha}\, x - \sqrt{-\beta}\, y)(\sqrt{\alpha}\, x + \sqrt{-\beta}\, y) = 0$$

e $\underline{C \text{ è l'unione di due rette distinte ed incidenti}}$.

Non ci sono altri casi possibili sotto l'ipotesi $\det(A')\neq 0$. Pertanto d'ora in poi

supporremo $\underline{\det(A')=0}$.

Per fissare le idee, sia $\underline{\alpha\neq 0}$ e $\underline{\beta=0}$

Quindi l'equazione (8) diventa:

$$\boxed{\alpha x^2+2b_1 x+2b_2 y+b_3=0}$$

Se cerchiamo una traslazione che ce la semplifichi ulteriormente, possiamo risolvere solo la prima delle (9), eliminando così il termine in x (q lo scegliamo arbitrariamente, per esempio: $q=0$).

Otteniamo, allora, l'equazione ($p=\frac{b_1}{\alpha}$ $q=0$):

$$\alpha X^2+2b_2 Y \underbrace{-\frac{b_1^2}{\alpha}+b_3}_{=:\gamma}=0$$

per semplicità pongo $b_2=\delta$

$$\boxed{\alpha X^2+2\delta Y+\gamma=0}$$

$$B=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta\\ 0 & \delta & \gamma\end{bmatrix} \qquad \underline{\det(B)=-\alpha\delta^2}$$

6) Se $\underline{\det(A)=\det(B)\neq 0} \iff \delta\neq 0$

allora $\underline{C}$ è una $\underline{\text{parabola}}$.

Quindi d'ora in avanti supporremo $\det(A)=0 \iff \delta=0$

$\alpha x^2+\gamma=0$

7) Se $\gamma\neq 0$ e $\alpha\gamma>0$ allora $C=\emptyset$

8) Se $\gamma\neq 0$ e $\alpha\gamma<0$ allora C ha equazione (suppost, per fissare le idee, $\alpha>0$ e $\gamma<0$

$$\alpha x^2+\gamma=\alpha x^2-\underbrace{(-\gamma)}_{>0}=(\sqrt{\alpha}\,x-\sqrt{-\gamma})(\sqrt{\alpha}\,x+\sqrt{-\gamma})=0$$

cioè C è l'unione di due rette parallele

9) Se $\gamma=0$ allora $\alpha x^2=0$ equivale a $x^2=0$ e C è "una retta contata due volte"

La nostra classificazione è completa !!!

OSSERVAZIONI

a) Tra le ellissi rientrano anche le circonferenze.

b) Una conica per cui $\det(A')\neq 0$ si chiama conica a centro. Infatti la (11) mostra che la conica è mutata in se stessa dalle simmetrie ortogonali

rispetto all'asse x $\quad \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} x \\ -y \end{vmatrix}$ e

rispetto all'asse y $\quad \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} -x \\ y \end{vmatrix}$

Dunque è lasciata invariata (= "mutata in se stessa) anche dalla composizione di tali due simmetrie, cioè

$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \longmapsto \begin{vmatrix} -x \\ -y \end{vmatrix}$ Si dice che l'origine O è centro di simmetria per la conica.

TABELLA RIASSUNTIVA:

$rg(A)$	$\det(A')$	C è	
$=3$	>0	un'<u>ellisse</u> "2" (caso part.: le <u>circonferenze</u>) comprende anche il caso $C=\emptyset$ "1"	C è una <u>conica non degenere</u>
	<0	un'iperbole "3"	
	$=0$	una parabola "6"	
$=2$	>0	un punto	
	<0	due rette incidenti	
	$=0$	$C=\emptyset$ } SPIEG.	
		due rette parallele	
1		una retta "contata due volte"	