ESERCIZIO (15/1/2015)

$V = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - z = 0 \right\}$ $\quad W = \left\{ \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$

- Verificare che V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$.

V è l'insieme di tutte le soluzioni del SLO $x - z = 0$. Dunque V è sottospazio vett. di $\mathbb{R}^3$. Lo stesso ragionamento funziona per W, insieme di tutte le soluzioni di $x + y + z = 0$.

In alternativa : $x - z = [1 \;\; 0 \;\; -1] \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ $\quad A \overset{def}{=} [1 \;\; 0 \;\; -1]$

$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ è applicazione lineare e $V = \mathrm{Ker}(L_A)$.

Quindi V è s. sp. vett. di $\mathbb{R}^3$.

- Determinare le dimensioni di V, W, $V \cap W$ e $V + W$.

$rg([1 \;\; 0 \;\; -1]) = 1 \implies \dim(V) = 3 - 1 = 2$

$rg([1 \;\; 1 \;\; 1]) = 1 \implies \dim(W) = 3 - 1 = 2$

$V \cap W$ è l'insieme di tutte le soluzioni del SLO

$\begin{cases} x \quad\; - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ la matrice dei coeff. è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

che ha rango 2. Quindi $\dim(V \cap W) = 3 - 2 = 1$

$\dim(V + W)$ è fornito dalla formula di Grassmann

$\dim(V + W) + \underbrace{\dim(V \cap W)}_{1} = \underbrace{\dim(V)}_{2} + \underbrace{\dim(W)}_{2} \longrightarrow$

$\dim(V + W) = 3$.

In alternativa : $V + W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che contiene sia V che W. Quindi

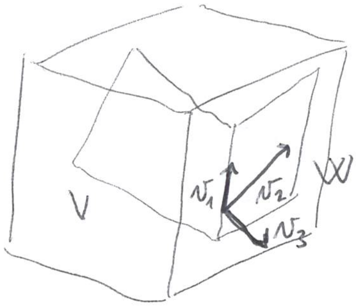
$2 \leq \dim(V + W) \leq 3$. Ma se fosse $\dim(V + W) = 2$, si avrebbe $V = W$, mentre $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \in V$ ma $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \notin W$. Dunque $\dim(V + W) = 3$

- Costruire, se possibile, un endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(T) = V \cap W$ e $Im(T) = W$.

Se T esiste allora $\dim(Ker(T)) = \dim(V \cap W) = 1$ e
$\dim(Im(T)) = \dim(W) = 2$

ed il teorema di dimensione di un'applicazione lineare funziona (è un test per scartare casi scemi)
SPIEGARE

$V \cap W$ è un sottospazio vett. di W. Quindi, se v_1 è una base di $V \cap W$, la posso prolungare ad una base v_1, v_2 di W. Infine prolungo questa ad una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$. Allora il teorema di Determinazione di un'applicazione lineare mi dice che esiste una ed una sola T lineare, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che



$$T(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad T(v_2) = v_1 \qquad T(v_3) = v_2$$

$T(v_1) = 0 \Rightarrow v_1 \in Ker(T) \Rightarrow \dim(Ker(T)) \geq 1$
$\Rightarrow V \cap W = Span(v_1) \subset Ker(T)$

$\left.\begin{array}{l} T(v_2) = v_1 \\ T(v_3) = v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow W = Span(v_1, v_2) \subset Im(T) \Rightarrow \dim(Im(T)) \geq 2$

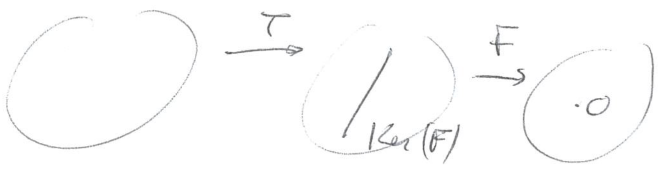
Ma $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) \Rightarrow$

$\dim(Ker(T)) = 1 \Rightarrow Ker(T) = V \cap W$ e

$\dim(Im(T)) = 2 \Rightarrow Im(T) = W$.

- Costruire, se possibile, un endomorfismo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Im(F) = V \cap W$ e $F \circ T = 0$
SPIEGARE

$$F\circ T = 0 \iff \overset{W}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Im}(T)}} \subset \mathrm{Ker}(F)$$



$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(F)) \geq 2$$

$$\dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(V \cap W) = 1$$

$$3 = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(F))}_{=1} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(F)) = 2 \Rightarrow \mathrm{Ker}(F) = W$$

Allora il teorema di determinazione di un'applicazione lineare ci dice che possiamo costruire una F con le proprietà richieste ponendo:

$$F(v_1) = 0 \qquad F(v_2) = 0 \qquad F(v_3) = v_1$$

ESERCIZIO Sia V uno spazio vettoriale con $\dim(V) = n\ (<\infty)$, e siano $f, g : V \to V$ due endomorfismi. Si verifichi che ogni autovalore di $f\circ g$ è anche autovalore di $g\circ f$, e viceversa.

Siano $v \in V$, $v \neq 0_V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\underbrace{(f\circ g)(v) = \lambda v}_{\text{cioè } \lambda \text{ è autovalore di } f\circ g}$

$$\lambda v = 0_V \iff \lambda = 0_{\mathbb{R}}$$

Supponiamo, per il momento $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}$. Dunque $g(v) \neq 0_V$

SPIEGARE. Allora

$$\underset{(g\circ f)(g(v))}{\underset{\shortparallel}{g\{(f\circ g)(v)\}}} = g(\lambda v) = \lambda g(v) \Longrightarrow \lambda \text{ è autovalore di } g\circ f$$

[λ autovalore di T $\quad \lambda = 0 \iff \mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.]

Allora, se $\lambda = 0$ o $g(v) = 0 \xRightarrow{v\neq 0} \mathrm{Ker}(g) \supsetneq \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}(g) \subsetneq V$

Oppure $g(v) \neq 0$, ma allora $f(g(v)) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(f) \supsetneq \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subsetneq V$

Ora

$\mathrm{Im}(f) \subsetneq V$ oppure $\mathrm{Im}(g) \subsetneq V \Longrightarrow \mathrm{Im}(f\circ g) \subsetneq V$

ma anche $\mathrm{Im}(g\circ f) \subsetneq V \Rightarrow \mathrm{Ker}(g\circ f) \supsetneq \{0\} \Longrightarrow$

0 è anche autovalore di $g\circ f$.

<u>ESERCIZIO</u> $\mathbb{E}^3$ O, x, y, z.

$r \begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x-y+3z=2 \end{cases}$ $\quad s \begin{cases} x-2y+6z=1 \\ 3x-y-2z=-2 \end{cases}$

(1) Trovare vettori di direzione ed equazioni parametriche per r ed s

(2) Verificare che le due rette sono incidenti

(3) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che le contiene.

(4) Calcolare la distanza di π dall'origine.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & -8 \end{array}\right] \end{array}$$

y è parametro libero $\quad T(r)$ ha per base $\begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix} = v$

Un punto di r è $(y=0)$ $\quad R(13, 0, -8)$

$$\begin{cases} x = 13+4t \\ y = -t \\ z = -8-3t \end{cases}$$ sono eq. param. per r

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -20 & -5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right]$$ z è parametro libero

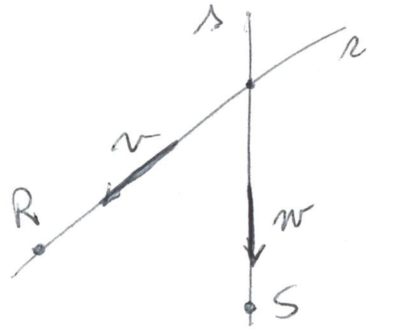
T(s) ha per base $\begin{vmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{vmatrix}$ oppure $\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix} = w$

$z=1$

Ponendo $z=0$ trovo il punto di s $S(-1,-1,0)$, e si scriviamo immediatamente equazioni parametriche anche per s.

<u>AVVERTIMENTO</u>: usare <u>lettere diverse</u> per i parametri nelle eq. param. di r e di s SPIEGARE.

r ed s <u>non sono parallele</u>. Se sono incidenti, allora v, w è una base per la giacitura del piano π che le contiene.



In tal caso, il vettore $\overrightarrow{RS}$ $\in T(\pi)$ deve essere combinazione lineare di v e w

$$\det \begin{array}{ccc} v & w & \overrightarrow{RS} = S - R \\ \end{array}$$

$$\det \begin{vmatrix} 4 & 2 & -14 \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ -3 & 1 \end{matrix} = 128 + 6 + 14 - 168 + 4 + 16 = 0$$

Consideriamo, allora il piano $\hat{\pi}$ passante per S ed avente giacitura W generata da v, w.

$\Rightarrow s \subset \pi$ OK. Inoltre $R = S + \overrightarrow{SR} \in \pi$

Ma allora anche $r \subset \pi$. Dunque il π definito sopra è proprio il piano cercato.

La sua equazione cartesiana si trova facilmente

$P \in \pi \iff \overrightarrow{SP}$ è combinazione lineare di v, w

$$P(x,y,z) \Rightarrow \overrightarrow{SP} = P - S = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z \end{vmatrix}$$

Dunque, l'equazione cercata è

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 2 & x+1 \\ -1 & 4 & y+1 \\ -3 & 1 & z \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & x+1 \\ -1 & 4 & y+1 \\ -3 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \\ -3 & 1 \end{matrix} = 16z - 6(y+1) - (x+1) + 12(x+1) - 4(y+1) + 2z = 0$$

$$11x + 11 - 10y - 10 + 18z = 0 \qquad \boxed{11x - 10y + 18z + 1 = 0}$$

$\begin{vmatrix} 11 \\ -10 \\ 18 \end{vmatrix}$ è una base di $W^\perp$, dove $W = T(\pi)$

non è un versore, la sua norma è

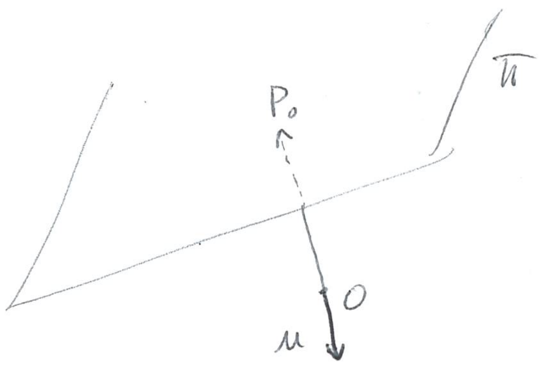
$$\sqrt{\left\langle \begin{vmatrix} 11 \\ -10 \\ 18 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 \\ -10 \\ 18 \end{vmatrix} \right\rangle_{st}} = \sqrt{11^2 + 10^2 + 18^2} = \sqrt{121 + 100 + 324} = \sqrt{545}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \\ 221 \\ \hline 545 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 545 & 5 \\ 109 & \end{array}$$

π ha anche equazione cartesiana

$$\frac{11}{\sqrt{545}}x - \frac{10}{\sqrt{545}}y + \frac{18}{\sqrt{545}}z = -\frac{1}{\sqrt{545}}$$

e queste, ora sono le componenti di un versore u



$$|b| = \|\overrightarrow{OP_0}\| = |\langle \overrightarrow{OP_0}, u \rangle|$$

Dunque la distanza di π da O è $\left|\frac{-1}{\sqrt{545}}\right| = \frac{1}{\sqrt{545}}$

ESERCIZIO 20/12/17 (7

In $\mathbb{A}^5$ è fissato un sistema di coordinate $O, x_1, \dots, x_5$. $V = \mathbb{R}^5$.

Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio affine S di $\mathbb{A}^5$, passante per $P(1,0,-2,-1,0)$, e la cui giacitura $T(S)$ ha per base

$$u_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad u_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

u_1, u_2, u_3 sono lin. indip.

Sappiamo che l'insieme di tutte le soluzioni di un SL compatibile in cinque indeterminate $x_1, \dots, x_5$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^5$. La dimensione di tale sottosp. affine è la dimensione dello spazio (sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$) di tutte le soluzioni del SLO associato. In particolare, l'insieme di tutte le soluzioni di

$$a_1x_1 + \dots + a_5x_5 = b \quad \text{è compatibile per } (a_1, \dots, a_5) \neq (0, \dots, 0)$$

è un sottospazio affine H di $\mathbb{A}^5$, di dimensione 4.

~o~

Voglio costruirmi un SLO nelle 5 incognite $x_1, \dots, x_5$ il cui spazio delle soluzioni ha per base u_1, u_2, u_3.

(✡) $a_1x_1 + \dots + a_5x_5 = 0$ avrà u_1 tra le sue soluzioni

$\iff a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 0 + a_5 \cdot 1 = 0$ cioè

$2a_1 + 4a_2 + a_5 = 0$

(✡) avrà u_2 tra le sue soluzioni $\iff a_2 - a_3 + 2a_5 = 0$

(✡) " u_3 " " " " $\iff 2a_1 + 5a_2 + a_4 = 0$

Quindi (*) avrà u_1, u_2, u_3 tra le sue soluzioni $\iff$ sono verificate tutte e tre le condizioni

$$(**)\begin{cases} 2a_1 + 4a_2 \qquad\qquad + a_5 = 0 \\ \qquad a_2 - a_3 \qquad + 2a_5 = 0 \\ 2a_1 + 5a_2 \qquad + a_4 \qquad = 0 \end{cases}$$

Questo lo considero come un SLO nelle incognite $a_1, a_2, \dots, a_5$

Faccio l'eliminazione con Gauss (e con tanto buon senso)

$$\begin{cases} 2a_1 + 4a_2 \qquad\qquad + a_5 = 0 \\ -4a_1 - 7a_2 - a_3 \qquad\quad = 0 \\ 2a_1 + 5a_2 \qquad + a_4 \qquad = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 = -4a_1 - 7a_2 \\ a_4 = -2a_1 - 5a_2 \\ a_5 = -2a_1 - 4a_2 \end{cases}$$

La dimensione dello spazio delle soluzioni è

$\#$ indeterminate $- rg(A) = 5 - 3 = 2$

matrice dei coeff. $\longrightarrow$ A $\qquad$ a_1, a_2 parametri liberi.

Due soluzioni linearmente indipendenti del SLO (**) sono date, allora da

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	0	-4	-2	-2
0	1	-7	-5	-4

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Lo spazio di tutte le soluzioni di questo SLO ha per base u_1, u_2, u_3, cioè è la giacitura di S.

Un sistema lineare compatibile che abbia S come spazio di tutte le soluzioni sarà allora del tipo

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = b \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 4x_5 = b' \end{cases}$$

Si tratta di trovare i valori giusti per b e b'.

Per questo basta imporre il passaggio per P:

$1 - 4(-2) - 2(-1) - 2 \cdot 0 = b$ $\quad b = 1 + 8 + 2 = 11$

$0 - 7(-2) - 5(-1) - 4 \cdot 0 = b'$ $\quad b' = 14 + 5 = 19$