ESERCIZI VARI di GEOMETRIA AFFINE

Un ovvio consiglio: si giustifichi la risposta ad ogni esercizio (o parte di esercizio) posto in forma di domanda.

Esercizio 1. Sia K un campo, e si consideri il K-spazio vettoriale K^n, dove $n \geq 1$. Si verifichi che K^n è in modo canonico uno spazio affine sul K-spazio vettoriale $V = K^n$.

Esercizio 2. Trovare la dimensione ed equazioni parametriche e cartesiane per il più piccolo sottospazio affine $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^4$ passante per i punti

$$A(0,1,-1,0) \quad B(1,0,2,0) \quad C(0,1,1,1) \quad D(1,0,4,1) \quad E(1,0,-2,-2)$$

Esercizio 3. Siano A, B, C tre punti affinemente indipendenti in uno spazio affine $\mathbb{A}$. Determinare il baricentro (cioè il punto di intersezione delle mediane dei lati) del triangolo ABC dopo aver introdotto in $\mathbb{A}$ un sistema di riferimento affine che semplifichi al massimo i calcoli da fare.

Esercizio 4. Siano $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ applicazioni affini. Si verifichi che $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}''$ è ancora un'applicazione affine, e che $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, dove g_*, f_* sono le applicazioni lineari associate a g ed f rispettivamente.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine. Supponiamo che gli spazi affini $\mathbb{A}$ ed $\mathbb{A}'$ siano costruiti rispettivamente sugli spazi vettoriali (sul campo K) V e V', e che $f_* : V \to V'$ sia l'applicazione lineare associata ad f. Provare che f è suriettiva (rispettivamente: f è iniettiva) se e solo se f_* è suriettiva (risp.: f_* è iniettiva).

Esercizio 6. Le notazioni sono le stesse dell'esercizio precedente. Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine biiettiva. Provare che l'applicazione inversa $f^{-1} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ è ancora un'applicazione affine, e che

$$\left(f^{-1}\right)_* = \left(f_*\right)^{-1}$$

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un' applicazione affine, e sia $B \subset \mathbb{A}$ un sottospazio affine. Si provi che $f(B)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}'$. Se, invece, $B' \subset \mathbb{A}'$ è un sottospazio affine tale che $f^{-1}(B') \neq \emptyset$, allora si provi che $f^{-1}(B')$ è ancora un sottospazio affine di $\mathbb{A}$.

Esercizio 8. Con le stesse notazioni dell' esercizio precedente, siano B e C sottospazi affini di $\mathbb{A}$ paralleli tra loro. Si provi che, allora, anche $f(B)$ ed $f(C)$ sono paralleli.

Esercizio 9. Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ spazi affini sullo stesso campo K, il primo di dimensione n. Siano, inoltre, $P_0, P_1, \ldots, P_n$ punti affinemente indipendenti di $\mathbb{A}$, e $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ punti di $\mathbb{A}'$, fissati ad arbitrio. Dimostrare che esiste una ed una sola applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

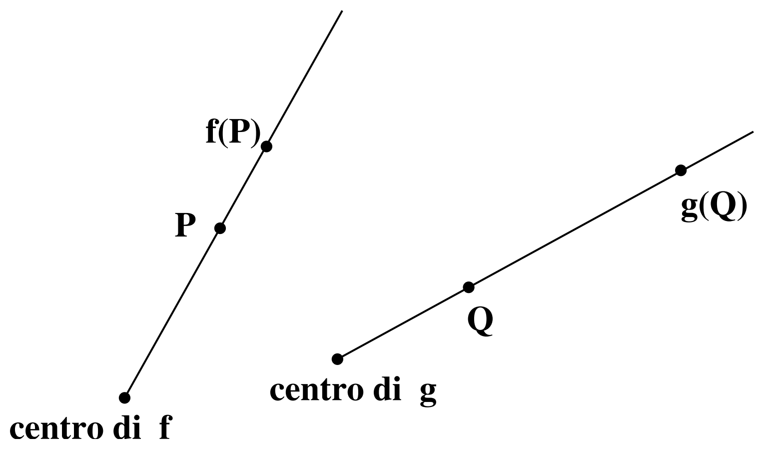
Esercizio 10. È possibile definire in un piano affine i concetti di trapezio, quadrato e parallelogramma?

Esercizio 11. Sia $S \neq \emptyset$ un sottospazio affine di uno spazio affine $\mathbb{A}$, e sia $H \subset \mathbb{A}$ un iperpiano. Provare che allora o S è parallelo ad H, oppure

$$dim(S \cap H) = dim(S) - 1$$

Esercizio 12. Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un' affinità. Diremo che f è un' *omotetia* o una *dilatazione* se e solo se l' applicazione lineare associata $f_* : V \to V$ è data dalla moltiplicazione per un fissato scalare λ. Dimostrare che ogni dilatazione diversa dall' applicazione identica ha esattamente un punto fisso, cioè un punto $P \in \mathbb{A}$ tale che $f(P) = P$. Tale punto viene detto il centro della dilatazione. Dimostrare che f è una dilatazione se e solo se per ogni retta r in $\mathbb{A}$, la retta $f(r)$ è parallela ad r.

Esercizio 13. Date due dilatazioni f e g nel piano affine, come nella figura qui sotto, costruire graficamente la loro composizione $f \circ g$:



Esercizio 14. Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un' applicazione affine. Provare che l' insieme $B = \{\, P \in \mathbb{A} \,|\, f(P) = P \,\}$ dei suoi punti fissi, se non è vuoto, è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$.

Esercizio 15. È vero che, presi comunque due quadrilateri Q_1 e Q_2 in un piano affine $\mathbb{A}$, esiste un' applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(Q_1) = Q_2$?

Esercizio 16. Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ siano date due rette parallele distinte B e B', aventi rispettivamente equazioni cartesiane (rispetto ad un sistema di riferimento affine fissato in $\mathbb{A}^2$)

$$ax + by + c \;=\; 0 \qquad\qquad a'x + b'y + c' \;=\; 0$$

Che cosa rappresenta l' equazione

$$\lambda\,(\, ax + by + c \,) + \mu\,(\, a'x + b'y + c' \,) \;=\; 0$$

al variare di $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ in tutti io modi possibili in K^2 ?
Scrivere l' equazione di appartenenza di tre rette allo stesso fascio di rette.

Esercizio 17. Provare che $M \subset \mathbb{R}^3$ è un piano se e solo se esistono $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ con $(\, a_1, a_2, a_3 \,) \neq (0, 0, 0)$ tali che

$$M \;=\; \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \,\}$$

Esercizio 18. Discutere, pensando all'interpretazione geometrica, tutte le possibilità per l'insieme:

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{cases} a_1 x + b_1 y \ = \ c_1 \\ a_2 x + b_2 y \ = \ c_2 \end{cases} \right\}$$

Fare lo stesso per l'insieme:

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z \ = \ d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \ = \ d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \ = \ d_3 \end{cases} \right\}$$

Esercizio 19. Determinare la posizione reciproca in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ della retta r di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x \ = \ 3t - 1 \\ y \ = \ t \\ z \ = \ t + 1 \end{cases}$$

e del piano α di equazione $x - 2y + z - 3 = 0$. Determinare un vettore di direzione ed equazioni cartesiane per r.

Esercizio 20. Caratterizzare l'insieme delle rette del piano affine, aventi un'equazione del tipo

$$(2\alpha - \beta)\, x + (\beta - \alpha)\, y + 4\alpha \ = \ 0$$

con $\alpha, \beta \in K$, e $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

Esercizio 21. In uno spazio affine di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, sia data la retta s di equazioni, rispetto ad un riferimento fissato:

$$\begin{cases} x + y - z + 2 \ = \ 0 \\ 2x - y + 5 \ = \ 0 \end{cases}$$

Determinare tutti i piani passanti per s e per $P(-1,-3,0)$. Determinare anche tutti i piani passanti per s e per $Q(0,5,7)$.

Esercizio 22. Sia $\mathbb{A}$ un piano affine su un campo K di caratteristica 101 (esiste ?), e sia O, v_1, v_1 un riferimento affine su $\mathbb{A}$. In $\mathbb{A}$ consideriamo le tre rette

$$r \quad x + y = 0 \qquad\qquad r' \quad x - y - 1 = 0 \qquad\qquad r'' \quad 2x + y + 2 = 0$$

e poniamo

$$O' := r \cap r' \qquad P := r \cap r'' \qquad Q := r' \cap r''$$

Infine poniamo

$$u_1 := P - O' \qquad u_2 := Q - O'$$

Verificare che O', u_1, u_1 è ancora un riferimento affine su $\mathbb{A}$, e scrivere le formule per il cambiamento di coordinate tra i due sistemi, in un verso e nell' altro.

Esercizio 23. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3, con un riferimento affine fissato. Sono dati i piani di equazioni

$$\begin{array}{lcl} \pi_1 & : & x + 5y - 1 = 0 \\ \pi_2 & : & 2y + \lambda z - 2 = 0 \\ \pi_3 & : & 2x + 4y - 3z + 4 = 0 \end{array}$$

Si determini, al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$, la posizione reciproca dei tre piani e si studi il sistema lineare di piani da essi generato.

Esercizio 24. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ in cui è fissato un sistema di riferimento, si determini l' equazione cartesiana del generico piano parallelo all' x .

Esercizio 25. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ in cui è fissato un sistema di riferimento, si consideri la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} \qquad y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Determinare l' equazione cartesiana del generico piano π parallelo ad r . L' insieme di tutti i piani in $\mathbb{A}^3$ paralleli ad r costituisce un sistema lineare ?

Esercizio 26. Siano (x, y, z) coordinate affini in uno spazio affine $\mathbb{A}$, di dimensione tre. Considerati in $\mathbb{A}$ il piano α di equazione $3x - 2y + z + 1 = 0$ ed il punto $P(1, 2, 1)$, trovare equazioni cartesiane e parametriche per la generica retta per P, parallela ad α.

Esercizio 27. Sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine nello spazio affine $\mathbb{A}$ su $\mathbb{R}^3$. Dare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per $A(1, 1, 4)$, parallela al piano π di equazione $x + y - 2z + 1 = 0$, ed incidente l' asse z.

Esercizio 28. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ su K, sono fissate due rette distinte a e b, ed un punto P non appartenente ad alcuna di esse. Si discuta l' esistenza di eventuali rette per P, che siano incidenti sia a che b, distinguendo le varie possibilità che si possono presentare.

Esercizio 29. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sul campo K, sono fissate due rette distinte a e b, ed un punto P non appartenente ad alcuna di esse. Si discuta l' esistenza di eventuali rette per P, che siano complanari sia con a che con b, distinguendo le varie possibilità che si possono presentare.

Esercizio 30. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}$ di dimensione 3, con un riferimento affine fissato, si scrivano equazioni per la retta passante per $P(1, 1, 1)$, ed incidente entrambe le rette

$$r \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad\qquad s \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Esercizio 31. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ su un campo K, sono date due rette, aventi equazioni rispetto ad un fissato sistema di riferimento affine

$$a \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad\qquad b \quad \begin{cases} y = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Sono dati, inoltre, il punto $P(0, -1, 2)$, ed il piano α di equazione

$$3x - 2y + z - 3 = 0$$

Si determinino mediante equazioni le rette r del piano α per le quali esiste una retta per P complanare ad a, b ed r.

Esercizio 32. Sia O, e_1, e_2, e_3 un sistema di coordinate affini in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Rappresentare la generica retta del piano di equazione $x + y - 2 = 0$ passante per $P(1, 1, 1)$.

Esercizio 33. Sia s_t la retta nello spazio affine di equazioni

$$\begin{cases} y + tz - t = 0 \\ 2x - tz = 0 \end{cases}$$

ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro. Verificare che, se t, t' sono numeri reali distinti, allora le rette s_t e $s_{t'}$ sono sghembe.

È vero che tutti i punti dell' insieme

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} s_t$$

verificano un' unica equazione cartesiana non banale?

Esercizio 34. Scrivere un' equazione cartesiana per il piano della stella di centro il punto $P(2, -1, 1)$, cioè passante per P, e contenente la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 35. In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia O, e_1, e_2, e_3 un sistema di coordinate affini. Trovare equazioni per ciascuna delle rette parallele al piano yz, incidenti all' asse x, ed a ciascuna delle due rette

$$r \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 36. Siano (x, y) coordinate nel piano affine sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Sulla retta r di equazione cartesiana

$$(3 + 2i)\, x - (1 - 3i)\, y + 4 = 0$$

vi sono punti (x_0, y_0) le cui coordinate sono entrambe reali?

Esercizio 37. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta r nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, passante per $P(0,-1,-1)$, parallela al piano α di equazione $2x-y-3z+1=0$, ed incidente la retta

$$s \qquad \begin{cases} 2x+3y-1 = 0 \\ x+z-3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 38. Lo stesso del precedente, ove stavolta $P(1,2,3)$, il piano α ha equazione $x+y+7=0$, e la retta s ha equazioni

$$\begin{cases} x = t-2 \\ y = 2t-5 \\ z = -\frac{1}{3}t \end{cases}$$

Esercizio 39. In uno spazio affine $\mathbb{A}^3$, in cui è stato introdotto un sistema di coordinate affini, si considerino il punto $P(1,1,-2)$, ed il piano α di equazione cartesiana $x+2y+z-5=0$. Trovare (mediante equazioni) il luogo dei punti simmetrici rispetto a P dei punti di α.

Esercizio 40. Si esprima analiticamente la simmetria $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ rispetto al piano α di equazione cartesiana $x+y-z+1=0$ nella direzione $v = (2,1,1)$. Si dimostri che si tratta di un' affinità. Chi è l' inversa ?

Esercizio 41. Si scrivano le equazioni per il cambiamento di coordinate nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ su $\mathbb{R}$, con la nuova origine $O' \in \alpha$ (le notazioni sono quelle dell' esercizio precedente), e la base w_1, w_2, w_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $w_1 = v$ e w_2, w_3 è una base della giacitura di α. Com' è l' espressione analitica di f in questo nuovo riferimento ?

Esercizio 42. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3, con un riferimento affine fissato. Trovare equazioni delle (due) rette parallele al piano yz, che sono incidenti sia all' asse x che a ciascuna delle due rette di equazioni

$$a \quad \begin{cases} y = x \\ z = x-1 \end{cases} \qquad\qquad b \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 2-y \end{cases}$$

Esercizio 43. In uno spazio affine reale $\mathbb{A}$ di dimensione 3, con un riferimento affine fissato, si consideri la stella Σ individuata dai tre piani

$$3x + y - 3 = 0 \qquad 3x + y + z = 0 \qquad z - 1 = 0$$

Determinare i piani della stella passanti per $P(1,1,0)$, e paralleli alla retta

$$r \quad \begin{cases} x = 2z \\ y = z + 1 \end{cases}$$

Determinare anche i piani di Σ passanti per $P(1,1,0)$, e paralleli alla retta

$$s \quad \begin{cases} y = -3x + 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 44. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione tre in cui è fissato un riferimento affine O, v_1, v_2, v_3. Considerati il piano H di equazione cartesiana $4x + y - 2z + 5 = 0$ ed il vettore $v = (1,2,1)$, scrivere equazioni per la proiezione $\mathbb{A} \to H$, di direzione v.

Esercizio 45. Sia $\mathbb{A}$ come nell'esercizio precedente, e siano H il piano di equazione cartesiana $x - 2y + z = 0$ ed r la retta

$$\begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Facendoti guidare dall'analogia, prova a definire che cosa si debba intendere per proiezione di $\mathbb{A}$ su r parallelamente ad H, e scrivi equazioni per tale applicazione. È un'applicazione affine?

Esercizio 46. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione tre su un campo K, in cui è fissato un riferimento affine O, v_1, v_2, v_3. Si considerini i tre punti $A(1,1,3)$, $B(0,-1,-2)$, $C(2,2,2)$, ed il piano π di equazione cartesiana $x+2y+3z+4=0$. Si cerchino eventuali direzioni $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ tali che, dette A', B', C' le proiezioni rispettivamente di A, B, C su π secondo la direzione v, il punto medio del segmento $B'C'$ sia A'.

Esercizio 47. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione tre su un campo K, in cui è fissato un riferimento affine O, v_1, v_2, v_3 . Trovare (se esistono) le direzioni tali che, proiettando le due rette

$$r \quad \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \qquad\qquad s \quad \begin{cases} x &= 0 \\ y+z+4 &= 0 \end{cases}$$

da tali direzioni sul piano α di equazione $2x+5y-1=0$ si trovano due rette parallele.

Esercizio 48. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione tre su un campo K, in cui è fissato un riferimento affine O, v_1, v_2, v_3 . Si descriva l' insieme delle rette sul piano π di equazione $3y+z+2=0$, che si ottengono proiettando su π la retta

$$r \quad \begin{cases} x-1 &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

dalle direzioni del piano $x+2y=0$.

Esercizio 49. In $\mathbb{A}^3$ in cui è stato fissato un riferimento affine O, v_1, v_2, v_3 , si considerino le due rette

$$r \quad \begin{cases} x-y+2z &= 0 \\ 3x+z-1 &= 0 \end{cases} \qquad\qquad s \quad \begin{cases} x+y+z-5 &= 0 \\ 2x-7y-z+2 &= 0 \end{cases}$$

Determinare eventuali direzioni dalle quali r ed s vengano proiettate sul piano α di equazione $2x+y+z-1=0$ in due rette incidenti nel punto $P(1,1,-2)$. Inoltre, determinare eventuali direzioni dalle quali r ed s vengano proiettate su α in due rette parallele.

Esercizio 50. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione tre su un campo K, in cui è fissato un riferimento affine O, v_1, v_2, v_3 . Determinare la posizione reciproca delle rette

$$r \quad \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2t \\ z &= 2t \end{cases} \qquad\qquad s \quad \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \end{cases}$$

Determinare le rette incidenti r ed s , e passanti per $P(1,2,1)$.

Esercizio 51. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3, con un riferimento affine fissato. Determinare eventuali rette incidenti ciascuna delle quattro rette

$$r_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad r_3 \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r_4 \begin{cases} x + y = 1 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 52. Lo stesso del precedente, ma stavolta per le quattro rette

$$r_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad r_3 \begin{cases} 4x - z = -3 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad r_4 \begin{cases} x + y = 1 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 53. Lo stesso del precedente, ma stavolta per le quattro rette

$$r_1 \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad r_3 \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r_4 \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Hai qualche idea "geometrica" sul perchè stavolta troviamo un numero diverso di soluzioni? (Per fartela venire, aiutati magari con un disegno accurato ...)

Esercizio 54. Lo stesso del precedente, ma stavolta per le quattro rette

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 55. Nel solito spazio affine con coordinate (x, y, z) consideriamo il piano π di equazione $ux + vy + wz + h = 0$. Trovare le condizioni cui devono soddisfare u, v, w, h affinchè π intersechi in tre punti allineati le tre rette

$$r \begin{cases} x = a \\ y = \alpha z \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = b \\ y = \beta z \end{cases} \qquad t \begin{cases} x = c \\ y = \gamma z \end{cases}$$

Esercizio 56. Nel solito spazio affine con coordinate (x, y, z) sono dati i tre piani:

$$\begin{array}{lrcl} \alpha & x + y - z + 3 & = & 0 \\ \beta & 2x - y + z + 2 & = & 0 \\ \gamma & x + y - z - 1 & = & 0 \end{array}$$

Determinare eventuali rette sul piano $x - 2y + 3z = 0$ aventi direzione generata da $(3, 0, -1)$, ed incidenti α, β, γ rispettivamente nei punti A, B, C in modo che il punto A sia il punto medio di BC.