

ESERCIZI VARI di GEOMETRIA EUCLIDEA

Un ovvio consiglio : si giustifichi la risposta ad ogni esercizio (o parte di esercizio) posto in forma di domanda.

Esercizio 1. Nel piano euclideo \mathbb{E}^2 sono fissati una retta r ed un punto P . Si discuta l'esistenza e l'unicità di rette passanti per P , ed ortogonali ad r . Si trovino, poi, le soluzioni nel caso concreto in cui $P(1,3)$ ed r è data da $8x - 2y - 5 = 0$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 sono fissati un piano α ed un punto P . Si discuta l'esistenza e l'unicità di rette passanti per P , ed ortogonali ad α . Si trovino, poi, le soluzioni nel caso concreto in cui $P(1,1,1)$ ed α è dato da $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 sono fissati una retta r ed un punto P . Si discuta l'esistenza e l'unicità di piani passanti per P , ed ortogonali ad r . Si trovino le soluzioni nel caso concreto in cui $P(4,1,0)$ e

$$r \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 sono fissati una retta r ed un piano α . Si discuta l'esistenza e l' (eventuale) unicità di piani passanti per r , ed ortogonali ad α . Dopodichè si analizzi il caso concreto in cui il piano α ha equazione $5x + y - 4 = 0$, mentre equazioni cartesiane per la retta r sono

$$\begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ 2y - 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

Si studi anche il caso in cui il piano α è come sopra, mentre la retta r è data da

$$\begin{cases} x - 5y + 8 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 sono fissati un punto P ed un piano α . Si studi l'insieme dei piani passanti per P ed ortogonali ad α . Dopodichè si analizzi il caso concreto in cui il punto è $P(0, 1, -1)$ ed il piano α ha equazione $4x + 2y + 7z - 3 = 0$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 sono fissati un punto P ed una retta r . Si studi l'insieme delle rette passanti per P ed ortogonali ad r . Dopodichè si analizzi il caso in cui il punto è $P(1, 2, 5)$ e la retta r ha equazioni

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7. Lo stesso dell'esercizio precedente, ma stavolta si richiede che la retta variabile, oltre a passare per P ed essere ortogonale ad r , sia anche incidente ad r . Dopodichè si analizzi il caso in cui r è come sopra, ed il punto è $P(2, 1, -3)$.

Esercizio 8. Trovare equazioni parametriche e cartesiane per

1. la retta in \mathbb{R}^2 ortogonale a $(1, 7)$ e passante per $(2, 3)$;
2. il piano in \mathbb{R}^3 ortogonale a $(2, -1, 3)$ e contenente $(7, 2, 1)$;
3. il piano in \mathbb{R}^3 contenente i tre punti $(1, 2, 5)$, $(0, 3, -2)$, $(3, 1, 0)$.

Esercizio 9. Dimostrare che esiste esattamente una retta s che interseca ciascuna di due rette sghembe r ed r' in uno spazio affine euclideo di dimensione 3, ed è ortogonale ad entrambe.

Se in tale spazio affine è fissato un riferimento ortonormale, trovare la retta s nel caso in cui

$$r = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1) \qquad r' = (1, 0, 0) + \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$$

Esercizio 10. In uno spazio affine euclideo di dimensione 3, in cui è fissato un riferimento ortonormale, sono date due rette. La prima di equazioni cartesiane

$$r \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

mentre la seconda r' passa per il punto di coordinate $(1, 0, 1)$ ed ha direzione generata da $v = (1, -1, 0)$. Determinare la retta perpendicolare comune incidente r ed r' , e la distanza fra le due rette.

Esercizio 11. In uno spazio affine euclideo di dimensione 3 si considerino le due rette incidenti r ed r' , aventi rispetto a fissate coordinate cartesiane ortogonali equazioni parametriche:

$$r \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad r' \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Scrivere equazioni parametriche e cartesiane per le due bisettrici degli angoli formati dalle due rette r ed r' nel piano che le contiene.

Esercizio 12. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette r ed s di equazioni rispettivamente:

$$r \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad s \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di r ed s . Determinare le rette incidenti e perpendicolari ad entrambe r ed s .

Esercizio 13. Sia \mathbb{E} un piano affine euclideo, con un riferimento ortonormale fissato. Dati i punti $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(1, 1)$ e $B'(2, 2)$, determinare le equazioni delle affinità che mutano A in A' e B in B' . Tra tali affinità ci sono delle rotazioni? Se sì, determinarle.

Esercizio 14. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si scrivano equazioni per il luogo dei punti appartenenti al piano di equazione $y - z + 2 = 0$, ed aventi uguale distanza dai punti $A(1, 0, -1)$ e $B(2, 1, -1)$.

Esercizio 15. Siano

$$\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4z + 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

equazioni cartesiane per le due rette r ed s in uno spazio affine euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, dotato di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Trovare il piano parallelo ad entrambe le rette, e da esse equidistante.

Esercizio 16. In un piano affine euclideo, in cui è stato fissato un sistema di coordinate affini ortogonali, si considerino i punti $P(2, 1)$, $Q(7, 0)$ ed $R(0, 3)$. Si trovi un'equazione cartesiana per la retta r passante per P e Q , e delle rette per R che formano con r un angolo di $\pi/3$.

Esercizio 17. In uno spazio affine euclideo, in cui è stato fissato un sistema di coordinate affini ortogonali, si considerino il piano α di equazione

$$x + y - \sqrt{3}z - 8 = 0$$

ed il punto $P(7, 1, 0)$ di α . Si determinino le rette di α passanti per P , e tali da formare un angolo di $\pi/3$ con l'asse z .

Esercizio 18. Dato un piano α ed un punto P nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 , determinare sinteticamente (cioè: senza calcoli in coordinate, con un ragionamento puramente geometrico) l'insieme I delle rette di α che hanno da P la minima distanza possibile. Si tratta di un sistema lineare? Si scrivano equazioni per la generica retta di I nel caso in cui P sia l'origine del sistema di coordinate, ed α abbia equazione

$$x + y - z - 1 = 0$$

Esercizio 19. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , in cui è stato fissato un sistema di coordinate affini ortogonali, si considerino il piano α di equazione cartesiana $4x + 3y - z - 2 = 0$, il punto $A(0, 0, -2)$ su α , ed il piano β di equazione $2x + y - z = 0$. Si determinino le rette di α passanti per A , e che formano con β un angolo di $\pi/6$.

Esercizio 20. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , in cui è stato fissato un sistema di coordinate affini ortogonali, si considerino i punti $O(0, 0, 0)$, $A(4, 2, 2)$ e $B(6, 4, 2)$. Si determini:

- a) il luogo dei punti equidistanti da A e B ;
- b) il luogo dei punti equidistanti da A , B ed O ;
- c) il luogo dei punti del piano $4x + 3y + z - 22 = 0$ equidistanti da A , B ed O .

Esercizio 21. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , in cui è stato fissato un sistema di coordinate affini ortogonali, si considerino i punti $A(3, 1, -1)$ $B(0, 0, 1)$ e la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare $C \in r$ in modo che il triangolo ABC sia isoscele, di vertice C . Trovare, poi, la distanza di $P(1, 2, 3)$ dalla retta

$$s \quad \begin{cases} x - y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 22. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , in cui è stato fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino le rette

$$r \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad s \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Trovare le rette che formano con r un angolo di $\pi/3$, e che sono perpendicolari ad s .

Esercizio 23. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , in cui è stato fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino le rette

$$r \quad \begin{cases} y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad s \quad \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Verificare che r ed s sono incidenti, e trovare i punti dell'asse x equidistanti da entrambe.

Esercizio 24. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , in cui è stato fissato un sistema di coordinate ortogonali, si consideri la retta

$$r \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni per i piani paralleli ad r , passanti per $P(0, 0, 4)$, ed aventi distanza 2 da r .

Esercizio 25. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 in cui è stato fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino le rette

$$r \quad \begin{cases} y + 2z - 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad s \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Trovare equazioni per le rette passanti per $A(2, 1, 1)$, ortogonali sia ad r che ad s .

Esercizio 26. Qual'è il luogo dei punti di \mathbb{E}^3 aventi distanza 5 dall'asse y ? Fissata in \mathbb{E}^3 una retta r , e fissato un numero reale positivo d , qual'è il luogo dei punti aventi distanza d da r ? Qual'è il luogo dei punti di \mathbb{E}^3 equidistanti da una retta ed un piano paralleli fissati?

Esercizio 27. Nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , in cui è stato fissato un sistema di coordinate ortogonali, si determinino le rette per $O(0, 0, 0)$, appartenenti al piano $x - y = 0$, ad aventi distanza $d = \sqrt{2}$ dal punto $P(0, 2, 0)$.

Esercizio 28. Trovare la distanza tra le due rette sghembe r ed s nello spazio affine euclideo \mathbb{E}^3 , le cui equazioni cartesiane sono rispettivamente

$$r \quad \begin{cases} y + 2z - 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad s \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 29. Trovare il luogo dei punti equidistanti dai due piani α e β , di equazioni rispettivamente

$$x + 4z = 0 \quad y - z + 1 = 0$$

Esercizio 30. Qual'è il luogo dei punti di \mathbb{E}^3 equidistanti da due rette sghembe? Introduci in \mathbb{E}^3 un sistema di coordinate ortogonali adattato, e scrivi l'equazione di tale luogo.

Esercizio 31. Determinare il luogo dei punti del piano $2z - 1 = 0$ equidistanti dalle due rette

$$r \quad \begin{cases} x = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad s \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 32. In \mathbb{E}^3 si considerino il piano α e la retta r di equazioni rispettivamente

$$y - 2z + 3 = 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$$

Si scrivano equazioni per l'immagine di r nella proiezione ortogonale su α .