Esercizi Geometria 1
Foglio 11

Esercizio 1. Usando vettori e ortogonalità, si dimostrino i seguenti teoremi:

1. Il teorema del coseno per i triangoli.
2. Le due diagonali di un rombo (parallelogramma equilatero) sono ortogonali.
3. I due teoremi di Euclide per i triangoli rettangoli.
4. Le tre altezze di un triangolo si intersecano in un punto.

Esercizio 2. Si consideri il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $b(z_1, z_2) = 2\mathfrak{Re}(z_1 z_2)$, dove $\mathfrak{Re}$ indica la parte reale di un numero complesso.

1. Si dimostri che b è bilineare e simmetrica.
2. Sia $\mathcal{B} = (1, i)$ base di $\mathbb{C}$; si calcoli $M_{\mathcal{B}}(b)$.
3. Sia $\mathcal{C} = (z_1, z_2)$ una generica base di $\mathbb{C}$; si verifichi che

$$\det(M_{\mathcal{C}}(b)) = \left[\det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z_1} & \bar{z_2} \end{pmatrix}\right]^2 .$$

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Fissato $v \in V$, si definisca $\phi_v : V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\phi_v(w) = \langle v, w \rangle$, per ogni $w \in V$.

1. Dimostrare che ϕ_v è lineare (e quindi $\phi_v \in V^*$).
2. Dimostrare che $\phi : V \to V^*$ definita da $\phi(v) = \phi_v$ è lineare.
3. Dimostrare che ϕ è iniettiva. Se la dimensione di V è finita, allora è anche suriettiva e quindi un isomorfismo.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si fissi il prodotto scalare standard. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \text{ e } x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$; si calcoli una base ortonormale di W e la si completi ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5.

1. Data la matrice unitaria
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
si calcolino la forma normale di A, una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ costituita da autovettori di A ed una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}AS$ sia diagonale.

2. Data la matrice unitaria
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
si calcolino la forma normale di B, una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori di B ed una matrice unitaria S tale che ${}^t\bar{S}BS$ sia diagonale.

3. Sia $f : \mathbb{R}^n \to R^n$ l'automorfismo definito da $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3, \ldots, f(e_{n-1}) = e_n, f(e_n) = e_1$ dove gli e_i rappresentano i vettori della base canonica. Trovare la matrice A di f rispetto alla base canonica (una matrice ortogonale e unitaria), gli autovalori di f e la forma normale unitaria (diagonale) di A.