Forme fondamentali su S

Sono forme bilineari simmetriche, o equivalentemente, forme quadratiche, sui piani tangenti.

<u>Remind</u>

V sp. vett. su K: una forma bilin. simm. su V è
$b: V \times V \longrightarrow K$ t.c. • è bilineare
• $b(v,w) = b(w,v)$ $\forall v$.

Data b le si può associare la forma quadratica
$$q: V \longrightarrow K$$
$$v \longrightarrow b(v,v) =: q(v)$$
q è t.c. • $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$
• $q(v+w) - q(v) - q(w)$ è una forma bilin. simm.: in effetti è $\frac{1}{2} b(v,w)$

Vicev. data una forma quadr. q, le si può associare una forma bilin. simm., detta forma polare di q, def. da $b(v,w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)]$

q. perché siamo su $\mathbb{R}$ che ha caratt. $\neq 2$.

Def.
La I forma fondamentale di S in P non è altro che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ ristretto a T_pS.
$$I_p: T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{f. bilin.}$$
$$I_p(w, w') = \langle w, w' \rangle$$

$$I_p: T_pS \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{f. quadr.}$$
$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

Data una carta locale $\varphi : U \to S$, ~~con~~

φ_u, φ_v è una base di T_pS in $\varphi(u,v) = P$.

Allora si ha la matrice di I_p rispetto a φ_u, φ_v:

$$M = \begin{pmatrix} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle & \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle & \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix}$$ simmetrica <u>def. positiva</u>,

perché il prod. scalare è def. pos., cioè

$I_p(w,w) \geq 0 \quad \forall w \in T_pS$ e $= 0 \iff w = 0$.

Allora $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0$

$\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle > 0$, e anche

il det di M è > 0 perché è il prod. degli autovalori della matrice, e tutti gli autovalori sono reali e positivi.

Gli elem. di M sono funzioni diff. di u, v, detti coefficienti della I ff, e indicati tradizionalmente come:

$E(u,v) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle > 0$

$F(u,v) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ $\qquad M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

$G(u,v) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle > 0 \qquad \det M = EG - F^2 > 0$

Se $w = a\varphi_u + b\varphi_v$, allora $I_p(w) = a^2E + 2abF + b^2G$,

in particolare se $w = \alpha'(t_0)$, con $\alpha(t_0) = P$, e

se $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, allora

$\alpha'(t_0) = \varphi_u u'(t_0) + \varphi_v v'(t_0)$ e

$I_p(\alpha'(t_0)) = u'(t_0)^2 E + 2u'(t_0)v'(t_0)F + v'(t_0)^2 G$.

Oss. che $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle -$

$- \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 =$

$= EG - F^2 = \det M$

verificare che det. $M > 0$.

Esempi

1) S piano di giacitura $\langle w, w' \rangle$, con w, w' base ortonormale

$S = P_0 + uw + vw'$

$\varphi_u = w$, $\varphi_v = w'$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ma se la base non è ortonormale è semplicemente $\begin{pmatrix} \langle w, w \rangle & \langle w, w' \rangle \\ \langle w, w' \rangle & \langle w', w' \rangle \end{pmatrix}$

2) S = cilindro $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

$\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$

$\varphi_v = (0, 0, 1)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ come la prima matrice di S

Def. $\sqrt{EG - F^2}$: elemento d'area di S

$\qquad \| \qquad$

$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ area del parallelogramma di lati φ_u, φ_v.

analogo di $\|\alpha'(t)\|$ per le curve

I concetti di natura metrica su S si esprimono in funz. della I ff.

- se $\alpha(t) \subset S$ $\qquad s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))}\, dt$

- se $R \subset S$ è una regione limitata (= chiusura di un aperto connesso con in una carta coordinata $\varphi(U)$, si def.

$$\text{Area di } R = \iint_{\varphi^{-1}(R)} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

Si giustifica con un ragionamento simile a quello della lung. d'arco.

3) il angolo ϑ tra φ_u, φ_v ha

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

<u>Oss.</u> la parametrizzazione è ortogonale se e solo se $F \equiv 0$.

II forma fondamentale.

<u>Def.</u> Data S sup. orientabile, N una sua orientazione, ossia ~~campo~~ campo diff. di versori normali, la <u>mappa di Gauss</u> associata è N <u>interpretata</u> come $N: S \longrightarrow S^2$:

infatti $\forall P \in S$ $N(p) = (x(p), y(p), z(p))$ t.c. $\|N(p)\| = 1$, ossia $x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2 = 1$.

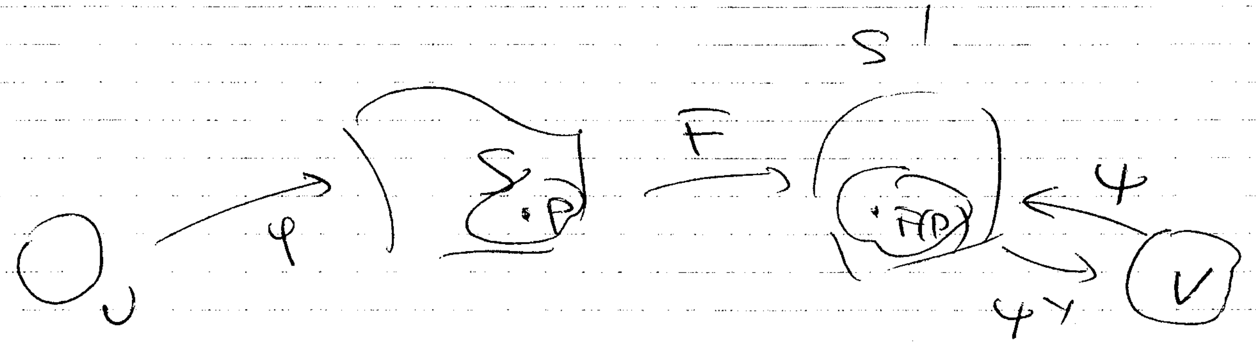
La mappa di Gauss risulta <u>continua</u> e <u>differenziabile</u>.

<u>Def.</u> Data $F: S_1 \longrightarrow S_2$ con S_1, S_2 sup. reg. F è detta <u>differenziabile</u> se la sua espressione in coordinate locali è differenziabile.

Ossia: $\forall P \in S_1$ e coppia di carte locali

$\varphi: U \longrightarrow \varphi(U) \subset S_1$ t.c. $P \in \varphi(U)$ e

$\psi: V \longrightarrow \psi(V) \subset S_2$ t.c. $F(P) \in \psi(V)$,



deve accadere che $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ è differenziabile in un intorno di $(u,v) = \varphi^{-1}(P)$.
Se si verifica la prop. per una carta in P, vale $\forall$ altra carta perché i cambiamenti di coordinate sono differenziabili.

Def. F è detta diffeomorfismo se è differenziabile ed $\exists$ F^{-1} differenziabile.

Prop. La mappa di Gauss è differenziabile.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[r, "N"] & S^2 & \\ U \arrow[ur, "\varphi"] & & & V \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Posso prendere $N \circ \varphi = N(u,v) = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$

e ψ di Monge $: (x,y) \to (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

allora $\psi^{-1}(N(u,v)) =$ prime 2 coord. di $N(u,v)$

ossia $\underbrace{\dfrac{1}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}}_{\neq 0} (y_v z_u - y_u z_v,\ x_u z_v - x_v z_u)$

che è differenziabile.

Differenziale di $F: S \to S'$ differenziabile.

Data $F: S \to S'$ diff., $\forall P \in S$ si def.

$d_P F: T_P S \longrightarrow T_{F(P)} S'$

$$v = \alpha'(0) \longrightarrow d_P F(v) = \frac{d}{dt} F(\alpha(t))\Big|_{t=0}$$

con $\alpha(t) \subset S$, $P = \alpha(0)$

<u>Prop.</u> $d_P F$ è ben def. e lineare

<u>Dim.</u> scelgo carte coordinate $\varphi: U \to S$ in P,
$(u,v) \to \varphi(u,v)$

e $\psi: V \to S'$ in $F(P)$;
$(\lambda,\mu) \to \psi(\lambda,\mu)$

allora (φ_u, φ_v) è base di $T_P S$ e (ψ_λ, ψ_μ) di $T_{F(P)} S'$.

<u>Claim</u> $d_P F$ è l'appl. lineare rappresentata, rispetto a queste basi, dalla matrice jacobiana di F espressa in coord. locali, ossia di

$$\psi^{-1} \circ F \circ \varphi: (u,v) \xrightarrow{\varphi} \varphi(u,v) \to F(\varphi(u,v)) \to \psi^{-1}(F(\varphi(u,v)))$$
$$(u,v) \longrightarrow (\lambda(u,v), \mu(u,v))$$

$$\alpha(t) = \varphi(\underbrace{u(t), v(t)}_{\varphi^{-1}(\alpha(t))}) \longrightarrow \beta(t) = F(\alpha(t)) =$$
$$= \psi(\lambda(u(t),v(t)), \mu(u(t),v(t)))$$

$$\alpha'(t) = \varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t)$$

$$\beta'(t) = \psi_\lambda \lambda'(t) + \psi_\mu \mu'(t)$$

$$\lambda'(t) = \lambda_u u'(t) + \lambda_v v'(t)$$
$$\mu'(t) = \mu_u u'(t) + \mu_v v'(t)$$

Allora $\alpha'(0)$, di coord. $(u'(0), v'(0))$ viene mandato

$\lambda'(0) = \lambda_u u'(0) + \lambda_v v'(0)$

$\mu'(0) = \mu_u u'(0) + \mu_v v'(0)$: ho proprio

l'appl. lin. di matrice $\begin{pmatrix} \lambda_u & \lambda_v \\ \mu_u & \mu_u \end{pmatrix}$.

Differenziale della mappa di Gauss.

Sia S una sup. orientabile, sia N un'orientazione

$N : S \longrightarrow S^2$

Allora $\forall P \in S$ si ha il differenziale

$d_P N : T_P S \longrightarrow T_{N(P)} S^2$ giaciture

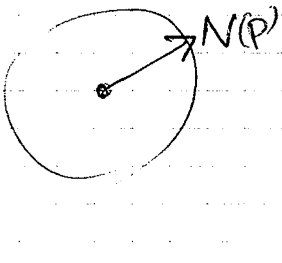
appl. lineare tra sp. vett. di dim 2

Prop. $T_P S = T_{N(P)} S^2$

Dim.

Per def. di N $T_P S = N(P)^{\perp}$.

Un campo di versori norm. a S^2 è dato da $\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}(x,y,z) = (x,y,z)$: il piano tang a S^2 $(F = x^2+y^2+z^2)$ nel punto $Q(x,y,z)$ è ortogonale al vettore $\overrightarrow{OQ}$, cioè al raggio; ~~vettore~~ $\overrightarrow{OQ}$
se $Q = N(P)$, si ha: $\overrightarrow{ON(P)}$ coincide con $N(P)$ interpretato come vettore, ossia



$T_{N(P)} S^2 = N(P)^{\perp}$.

Allora d_pN è un endomorfismo di T_pS

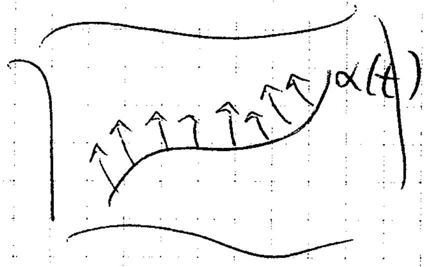
$$d_pN : T_pS \longrightarrow T_pS$$

$$w = \alpha'(0) \longrightarrow \frac{d}{dt}(N\circ\alpha)(t)\Big|_{t=0} = (N\circ\alpha)'(0)$$

con $\alpha(t) \subset S$, $\alpha(0) = P$

$$\| \quad d_pN(\alpha'(0))$$

Noto: $N(\alpha(t)) = N(t)$ funz. di t : è il versore normale ristretto alla curva $\alpha(t)$



se $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ su una carta locale

$$N(t) = N(\varphi(u(t), v(t))) = \frac{\varphi_u(u(t),v(t)) \wedge \varphi_v(u(t),v(t))}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

$d_pN(\alpha'(0)) = N'(t)\Big|_{t=0} = N'(0)$; è la variazione infinitesima del versore normale nella direz. di $\alpha(t)$ in P.

Per le curve regolari la variaz. infinitesima di T dà la curvatura

Per le sup.: "variazione di N" equivale a "variazione del piano tangente" $\rightsquigarrow$ curvatura nella direz ~~di~~ $\alpha(t)$

L'endomorfismo descrive questa variazione in tutte le direzioni.

Esempi 1. S^2 o più in gen. $x^2+y^2+z^2 = r^2$

$$N_{(x,y,z)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{r}$$

se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \subset S$,

$$N(t) = \frac{(x(t), y(t), z(t))}{r}$$

$$d_pN(\alpha'(t)) = N'(t) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{r} \Rightarrow$$

$d_pN(v) = \frac{v}{r}$: d_pN è l'omotetia di rapporto $\frac{1}{r}$.

2. Piano $ax+by+cz+d = 0 = f(x,y,z)$

$\nabla f = (a, b, c) \neq (0,0,0)$ costante

$N = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ costante

$d_pN(\alpha'(t)) = N'(t) \equiv 0$ endom. nullo

3. Cilindro: $f = x^2+y^2 = 1$

$\nabla f = (2x, 2y, 0)$

$$N(P) = \frac{(2x, 2y, 0)}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \frac{(x, y, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x, y, 0)$$

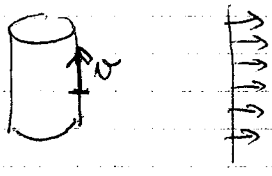
$N(\alpha(t)) = N(t) = (x(t), y(t), 0)$

$N'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$

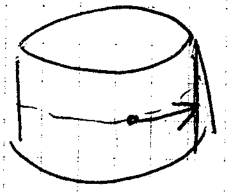
$d_pN(x'(t), y'(t), z'(t)) = (x'(t), y'(t), 0)$ è la proiezione ortogonale sul piano xy

Autovettori di d_pN $\begin{cases} v_3 = 0 & \text{autovalore } \lambda = 1 \\ (v_1, v_2) = (0,0) & \lambda = 0 \end{cases}$

$v(v_1 v_2 v_3) \to (v_1, v_2, 0)$



N è cost in direz. verticale



Def. $-d_pN$: operatore forma o di Weingarten (= shape operator).

Teorema $+d_pN$ è un endomorfismo autoaggiunto: $\forall\, w, w' \in T_pS$ si ha

$$\langle d_pN(w), w' \rangle = \langle w, d_pN(w') \rangle. \qquad (*)$$

(autoaggiunto o simmetrico)

Dim.

Fisso una carta locale (U, φ) con $p = \varphi(0,0)$. Allora si può esprimere N come $N(u,v)$ $= N(\varphi(u,v))$, in funz. delle coordinate locali. Per la linearità di d_pN e la bilinearità del prod scalare è sufficiente dim. la relazione $(*)$ per i vettori della base (φ_u, φ_v).

Ci basta dim. che $\langle d_pN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, d_pN(\varphi_v) \rangle$

Chi è $d_pN(\varphi_u)$? φ_u è il vettore tang alla curva coordinata $\varphi(u,0)$; allora

$$d_pN(\varphi_u) = \frac{d}{du} N(\varphi(u,0))\Big|_{u=0} = \frac{d}{du} N(u,0)\Big|_{u=0} = N_u(0,0).$$

Analogamente $d_pN(\varphi_v) = N_v(0,0)$. Allora $\langle d_pN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle N_u, \varphi_v \rangle$, e $\langle \varphi_u, d_pN(\varphi_v) \rangle = \langle \varphi_u, N_v \rangle$.

Osserviamo che $\langle N(u,v), \varphi_u \rangle = \langle N(u,v), \varphi_v \rangle = 0$ perché φ_u, φ_v sono tangenti e N è normale.

Allora sono nulli anche i loro derivati:

$$\left.\begin{array}{l} \langle N_u, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{uu}\rangle = 0 \\ \langle N_v, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{uv}\rangle = 0 \\ \langle N_u, \varphi_v\rangle + \langle N, \varphi_{vu}\rangle = 0 \\ \langle N_v, \varphi_v\rangle + \langle N, \varphi_{vv}\rangle = 0 \end{array}\right.$$

$\langle N_v, \varphi_u\rangle + \langle N, \varphi_{uv}\rangle = 0$, $\langle N_u, \varphi_v\rangle + \langle N, \varphi_{vu}\rangle = 0$] $\varphi_{uv} = \varphi_{vu} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle N_v, \varphi_u\rangle = \langle N_u, \varphi_v\rangle$, cioè la tesi.

(la I e IV relazione non ci sono servite ma teniamole presenti). ☆

Cor. 1. La matrice di d_pN risp. a una base ortonormale è simmetrica.
2. Si può applicare il teorema spettrale.
3. Ha senso parlare della forma bilineare simm. e della forma quadratica associate a $-d_pN$.

1. vale solo per basi ortonorm., φ_u, φ_v in generale non lo è.
2. Th. spettrale: se $f: V \to V$ è un endom. autoaggiunto di V, sp. vett. euclideo di dim finita, V ammette una base ortonormale formata da autovettori di f. Nel nostro caso T_pS ha una base ortonorm. formata da autovettori di $-d_pN$. Gli autovalori possono coincidere ($\Leftrightarrow -d_pN$ è omotetia), oppure sono distinti; in tal caso gli

autospazi sono due rette ortogonali: sono 2 direzioni privilegiate su T_pS, dette <u>direzioni principali</u>.

Sia (e_1, e_2) una base ortonormale di autovettori di $-d_pN$ (non unica). ~~ ~~

Allora la matrice di $-d_pN$ rispetto a questa base è del tipo

$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ dove k_1, k_2 sono gli autovalori

Se $k_1 = k_2 = k$, $-d_pN$ è un'omotetia, e $\forall$ vettore $w \in T_pS$ si ha $-d_pN(w) = kw$; P si dice un <u>ombelico</u> di S.

Per es. piano: $k = 0$

sfera $k = \frac{1}{r}$

"tutte le direzioni sono equivalenti".

Se invece $k_1 \neq k_2$, pongo $k_1 > k_2$. Es nel cilindro $k_1 = \frac{1}{r} > k_2 = 0$. Si ha

$-d_pN(e_1) = k_1 e_1$

$-d_pN(e_2) = k_2 e_2$

e_1, e_2 sono detti <u>versori principali</u> in P,

k_1, k_2 <u>curvature principali</u> in P.

Se prendo un'altra base, per es. φ_u, φ_v, la matrice cambia e in gen. non sarà né simmetrica né diagonale. Però la traccia e il determinante non cambiano, dipendono solo dall'endomorfismo $-d_pN$.

<u>Def.</u> • <u>curvatura gaussiana</u> di S in P è $\det(-d_pN) = k_1 k_2 =: K(P)$

• curvatura <u>media</u> di S in P è $\frac{1}{2}(\text{traccia}) =$

$= \frac{k_1+k_2}{2} =: H(P).$

All'inizio ho fissato un'orientazione di S, è suff. fissare un'orientazione di un intorno di S. Ma se sostituisco N con $-N$, anche $-d_P N$ cambia segno, e di conseguenza gli autovalori, ossia k_1 e k_2 cambiano segno. Ma le direzioni principali rimangono le stesse.

Allora $H(P)$ cambia segno, ma $K(P) = k_1 k_2 = (-k_1)(-k_2)$ non cambia, la curvatura gaussiana è intrinseca.

<u>Def.</u> • P è detto punto ellittico se $K(p) > 0$ ossia k_1, k_2 hanno lo stesso segno. In particolare se $k \neq 0$ un ombelico è ellittico.

• P è <u>iperbolico</u> se $K(p) < 0$, k_1 e k_2 hanno segni opposti

• Se $K(p) = 0$ si distinguono 2 casi:

- se $k_1 = k_2 = 0$ cioè se $d_P N = 0$ P è detto punto planare o flesso (piano)
- se $k_1 > k_2$ e uno dei 2 è nullo, P è detto parabolico (cilindro)

3) Da $\langle -d_P N(w), w' \rangle = \langle w, -d_P N(w') \rangle$, $\forall w, w' \in T_P S$ segue che si può <u>def.</u> la <u>II</u> forma fondamentale in P come

$$\underline{II}_P : T_P S \times T_P S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(w, w') \longrightarrow \underline{II}_P(w, w') = \langle -d_P N(w), w' \rangle.$$

forma bilin. simmetrica; oppure

$$\mathrm{II}_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longrightarrow \mathrm{II}_p(w) = \langle w, -d_pN(w) \rangle$$

la forma quadratica associata.

Se (U, φ) è una carta locale in P, risp. alla base (φ_u, φ_v) la matrice di II_p è

$$\begin{pmatrix} \langle -d_pN(\varphi_u), \varphi_u \rangle & \langle -d_pN(\varphi_u), \varphi_v \rangle \\ \langle -d_pN(\varphi_u), \varphi_v \rangle & \langle -d_pN(\varphi_v), \varphi_v \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle -N_u, \varphi_u \rangle & \langle -N_u, \varphi_v \rangle \\ \langle -N_v, \varphi_u \rangle & \langle -N_v, \varphi_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{II}_p(\varphi_u) & \mathrm{II}_p(\varphi_u, \varphi_v) \\ \mathrm{II}_p(\varphi_u, \varphi_v) & \mathrm{II}_p(\varphi_v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$ coeff. della II f.f., funz. su U

notaz. classica — notaz. do Carmo

Si può anche scrivere (per l'oss. di $\cancel{A}$)

$$\begin{pmatrix} \langle N, \varphi_{uu} \rangle & \langle N, \varphi_{uv} \rangle \\ \langle N, \varphi_{uv} \rangle & \langle N, \varphi_{vv} \rangle \end{pmatrix}$$

ossia $e = \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \left\langle \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}, \varphi_{uu} \right\rangle =$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})$$

k invece usiamo una base ortonorm. di autovettori di $-d_pN$, cioè 2 versori principali e_1, e_2, si ha

$$II_p(e_1) = \langle -d_pN(e_1), e_1 \rangle$$

ma $-d_pN(e_1) = k_1 e_1$

$$= \langle k_1 e_1, e_1 \rangle = k_1$$

$$II_p(e_2) = k_2$$

$$II_p(e_1, e_2) = \langle -d_pN(e_1), e_2 \rangle = \langle k_1 e_1, e_2 \rangle = 0$$

e quindi $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ è anche la matrice di II_p.

k $w = a\varphi_u + b\varphi_v$, $II_p(w) = a^2 e + 2abf + b^2 g$;

se $w = \lambda e_1 + \mu e_2$ $\quad II_p(w) = \lambda^2 k_1 + \mu^2 k_2$.

Matrice di $\cancel{d_pN}$ II_p: sempre simmetrica;

" $\quad -d_pN$ non nec. simmetrica.

Esempio di punto iperbolico.

$S: z = xy \qquad F = z - xy \qquad \nabla F = (-y, -x, 1) \neq (0,0,0)$

$\varphi(u,v) = (u, v, uv) \qquad \varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$

k $z=0$: $\quad xy = 0 \quad$ 2 assi

$z = 1 \quad xy - 1 = 0 \quad$ iperbole

$z = 2 \quad xy - 2 = 0 \quad$ "

ecc.

k $x = y \Rightarrow z = x^2$

$\varphi_u = (1, 0, v)$, $\varphi_v = (0, 1, u)$

$\varphi_{uu} = (0,0,0) = \varphi_{vv}$

$\varphi_{uv} = (0, 0, 1)$

$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-v, -u, 1)$

$E = 1 + v^2$, $F = uv$, $G = 1 + u^2$

$EG - F^2 = 1 + u^2 + v^2 = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2$

$e = 0 = g$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} (\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv}) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

$$N(u,v) = \frac{(-v, -u, 1)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

$P = \varphi(u_0, v_0)$

Voglio la matrice di $-d_P N$ rispetto a $(\varphi_u, \varphi_v) =$
$= ((1, 0, v_0), (0, 1, u_0))$

$$-d_P N(\varphi_u) = \frac{d}{du} \left(-N(\varphi(u, v_0)) \right|_{u=u_0} =$$

$$= \frac{d}{du} \left(\frac{v_0, u, 1}{\sqrt{1+u^2+v_0^2}} \right) \Bigg|_{u=u_0} =$$

$$= \frac{1}{(1+u_0^2+v_0^2)} \left(\frac{-v_0 \cdot 2u_0}{2\sqrt{}}; \sqrt{} - \frac{u^2}{\sqrt{}}, \frac{-u_0}{\sqrt{}} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+u_0^2+v_0^2)^{3/2}} \left(-u_0 v_0, 1 + v_0^2, -u_0 \right) =$$

$= a (1, 0, v_0) + b (0, 1, u_0)$:

$$a = \frac{-u_0 v_0}{(1+u_0^2+v_0^2)^{3/2}}, \quad b = \frac{1+v_0^2}{(1+u_0^2+v_0^2)^{3/2}}$$

analogamente per $-d_pN(\varphi_v)$ $\Rightarrow$ la matrice di $-d_pN$ risp. a φ_u, φ_v è:

$$(1+u^2+v^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -uv & 1+u^2 \\ 1+v^2 & -uv \end{pmatrix}$$ non è simmetrica

$$K(P) = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^3} \left(u^2v^2 - (1+u^2)(1+v^2) \right) =$$

$$= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^3} (-1-u^2-v^2) < 0 \quad \forall (u,v)$$

<u>tutti punti iperbolici</u>

Se $P=(0,0)$, la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K(0,0) = -1$$

$\varphi_u = (1,0,0)$

$\varphi_v = (0,1,0)$

$-d_pN(\varphi_u) = \varphi_v, \quad -d_pN(\varphi_v) = \varphi_u$.

φ_u, φ_v non sono autovettori, ma la base è ortonormale.

Il pol. caratt. è $\det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2-1$

$\Rightarrow k_1 = 1, \ k_2 = -1$

Autovettori: $k_1=1$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad a=b$

$\Rightarrow \varphi_u + \varphi_v = (1,1,0)$

$k_1=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad b=-a$

$\varphi_u - \varphi_v = (1,-1,0)$ Devo normalizzare:

$$e_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \qquad e_2 = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$H = \frac{k_1+k_2}{2} = 0$$

---

curvatura normale in una direzione fissata

Sia $w \in T_pS$ un versore.

Oss. che $\mathrm{II}_p(w) = \mathrm{II}_p(-w)$, perché

$$\mathrm{II}_p(-w) = \langle -d_pN(-w), -w \rangle = \langle d_pN(w), w \rangle = \\ = \langle -d_pN(w), w \rangle = \mathrm{II}_p(w)$$

Def. <u>curvatura normale</u> nella direz. di w

$$k_n(w) = \mathrm{II}_p(w) = \langle -d_pN(w), w \rangle$$

Oss. che se $w = \alpha'(0)$ è un vettore tang., non nec. versore, si ha: $\quad (N(t) = N(\alpha(t)))$

$$\mathrm{II}_p(\alpha'(0)) = \langle -d_pN(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = \\ = \langle -N'(t)\big|_{t=0}, \alpha'(0) \rangle .$$

Ma $\langle N(t), \alpha'(t) \rangle \equiv 0$ perché sono ortogonali,
e perciò $\langle N'(t), \alpha'(t) \rangle + \langle N(t), \alpha''(t) \rangle \equiv 0$
e quindi $\langle -N'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle N(t), \alpha''(t) \rangle$.

Perciò $\mathrm{II}_p(\alpha'(0)) = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle$:
è il modulo della componente dell'accelerazione nella direzione normale (perché N è un versore).

(questo generalizza quanto visto per $d_pN(\varphi_u)$).

Sia $\alpha \subset S$ una curva regolare, supp. sia parametrizzata con s lunghezza d'arco.

~~Def. la curvatura normale della curva α su S come~~ consideriamo $k_n(T) = k_n(\alpha'(s))$, curvatura normale nella direzione di α.

Per quanto visto sopra la curv. norm. in $P = \alpha(0)$ è

$$k_n(\alpha'(0)) = II_p^*(\alpha'(0)) = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle =$$

se P non è planare

$$= \langle N(0), k_\alpha(0) n_\alpha(0) \rangle =$$ dove n_α è il versore normale ad α

$$= k_\alpha(0) \langle \underbrace{N(0), n_\alpha(0)}_{\cos\vartheta} \rangle = k_\alpha(0)\cos\vartheta.$$

$\cos\vartheta$ dove ϑ è l'angolo fra i 2 versori normali

Se P è un flesso per α, ossia se $\alpha''(0) = 0$,

$II_p(\alpha'(0)) = 0 = k_n(\alpha'(0))$: la curvatura normale è nulla nella direz. di α. Questo accade in tutti i punti di una retta contenuta in S.

Si def. la curvatura normale di α come $k_\alpha(0)\cos\vartheta$.

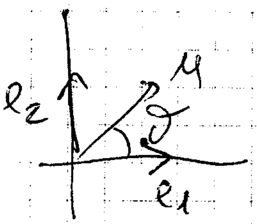
Si ha il Teor. di Meusnier.

La curvatura normale della curva α dipende solo dal suo versore tangente, infatti coincide con $k_n(\alpha'(0))$.

Formula di Eulero per la curvatura normale.

Sia (e_1, e_2) una base normale di autovettori di $-d_pN$: $-d_pN(e_1) = k_1 e_1$

P non ombelico $\quad -d_pN(e_2) = k_2 e_2 \quad , \quad k_1 > k_2$



Se u è un versore che punta nel semipiano superiore, l'angolo fra e_1 e u è ϑ con $0 \le \vartheta \le \pi$ (angolo orientato)

e si ha: $u = \cos\vartheta\, e_1 + \sin\vartheta\, e_2$

$$-d_pN(u) = \cos\vartheta (k_1 e_1) + \sin\vartheta (k_2 e_2)$$

$$k_n(u) = \langle -d_pN(u), u \rangle =$$
$$= \langle \cos\vartheta (k_1 e_1) + \sin\vartheta (k_2 e_2), \cos\vartheta\, e_1 + \sin\vartheta\, e_2 \rangle =$$
$$= \cos^2\vartheta\, k_1 + \sin^2\vartheta\, k_2 = k_n(\vartheta)$$

<u>formula di Eulero</u>

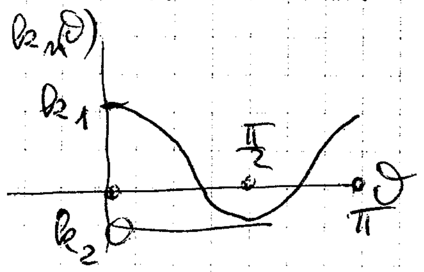
k_n funz. di ϑ, $0 \le \vartheta \le \pi$

consid. la derivata:

$$k_n'(\vartheta) = -2\cos\vartheta \sin\vartheta\, k_1 + 2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, k_2 =$$
$$= 2 \sin\vartheta \cos\vartheta \underbrace{(k_2 - k_1)}_{<0}$$

Allora $k_n'(\vartheta) = 0$ per $\begin{cases} \sin\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \pi \\ \cos\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$k_n(0) = k_1$, $k_n(\frac{\pi}{2}) = k_2$, $k_n(\pi) = k_1$



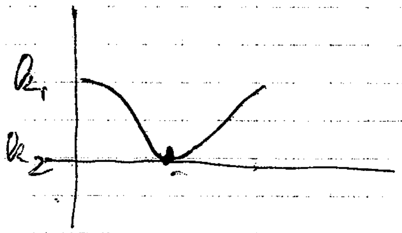
$k_n(\vartheta)$ è continua con derivata negativa tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, positiva tra $\frac{\pi}{2}$ e π

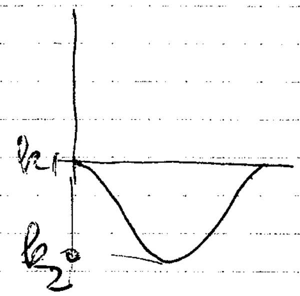
$\Rightarrow$ decresce tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ e poi cresce tra $\frac{\pi}{2}$ e π, ha minimo in $\frac{\pi}{2}$ che vale k_2, massimo in 0 e π, dove vale k_1.

<u>Corollario</u> k_1, k_2 sono risp. il max e il min della curvatura normale nelle varie

direzioni: k_n assume tutti i valori intermedi, max e min sono raggiunti nelle direzioni principali.
Se $K(p)>0$, k_n non è mai nulla,
se $K(p)<0$ k_n si annulla in 2 direzioni asintotiche.

Se $K(p)=0$ e P è parabolico, $\frac{\pi}{2}$ è direzione asintotica e principale, oppure 0.





Se $H(p)=0$, $k_2=-k_1$: P può essere iperbolico o planare.

Def. si def. asintotica una direz. w t.c. $II_p(w)=k_n(w)=0=\langle -d_pN(w),w\rangle$;
ma in gen. $d_pN(w)$ è $\neq 0$, $d_pN(w)$ e w sono ortogonali.
Se $d_pN(w)=0 \Rightarrow w$ è autovettore di autovalore $0 \Rightarrow$ la sua direzione è principale con curvatura $k_i=0$;
il punto P è parabolico o planare.
Oss. Se per P passano 3 o più rette contenute in S, P è punto planare.

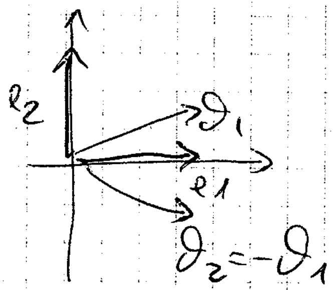
Se P è iperbolico, $\underset{\substack{\vee\\ 0}}{k_1} > \underset{\substack{\wedge\\ 0}}{k_2}$; se θ è asintotica

$$k_n(\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\sin^2\theta = -\frac{k_1}{k_2}\cos^2\theta$$

$$\tan^2\theta = -\frac{k_1}{k_2} \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

le 2 direzioni asintotiche hanno direzioni $\theta_2 = -\theta_1$ $\Rightarrow$ le direzioni principali sono bisettrici di quelle asintotiche.



Sezioni normali di S

$P \in S$, $\vec{w} \in T_pS$ (versore), N versore normale.

Sia $\pi = P + \langle w, N \rangle$ piano per P ortogonale al piano tangente.

Def: $\pi \cap S$: sezione normale di S in direzione w.

Si dim. (Abate–Tovena) che $\pi \cap S$ può essere parametrizzata, ~~come~~ ossia è la traccia ~~grafico~~ di una curva regolare, in un intorno di P: $\sigma(t)$. La retta tang a σ è $\subseteq T_pS$ (perché $\sigma \subset S$), e $\subseteq \pi$ perché $\sigma \subset \pi$, e quindi è la retta $P + \langle w \rangle$.

Se $k_n(w) \neq 0$, π è il piano osculatore di σ e quindi il versore normale

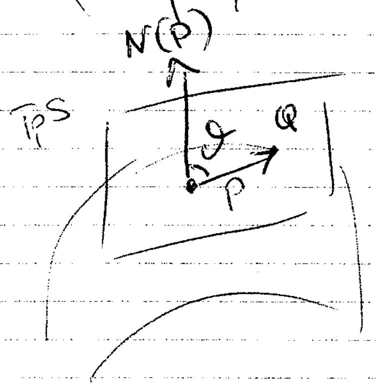
Il π è ortogonale a w $(=\pm T)$, e quindi $n_\sigma = \pm N$, l'angolo ϑ è 0 oppure π.

Allora $k_n(w) = k_\sigma$ se la sez. normale ha N all'interno, $k_n(w) = -k_\sigma$ se N è all'esterno.

Se P è ombelico, le sez. normali hanno tutte la stessa curvatura, la curvatura normale è costante.

<u>Comportamento del piano tangente</u> rispetto a S: studio di $S \cap T_pS$.

Sia $\varphi(u,v)$ una parametrizzazione locale, con $P = \varphi(0,0)$.



Vogliamo studiare la distanza di $Q = \varphi(u,v)$ da T_pS, al variare di (u,v).

Poichè T_pS è orientato che
$$N(P) = \frac{\varphi_u(0,0) \wedge \varphi_v(0,0)}{\|\varphi_u(0,0) \wedge \varphi_v(0,0)\|},$$
si può parlare di distanza orientata, che è positiva se Q sta nel semipiano in cui punta N. Tale distanza è data da:
$$d(Q, T_pS) = \langle \varphi(u,v) - \varphi(0,0), N(P) \rangle =$$
$$= \langle Q - P, N(P) \rangle =$$
$$= \|\vec{PQ}\| \cos\vartheta$$
: la distanza risulta positiva se $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ e negativa se $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$.

Si ha:

$$\varphi(u,v)-\varphi(0,0) \overset{\text{Taylor}}{=} \varphi_u(0,0)u + \varphi_v(0,0)v + \frac{1}{2}(\varphi_{uu}u^2 + 2\varphi_{uv}uv + \varphi_{vv}v^2) + R(u,v),$$

dove $R(u,v)$ è una funz. t.c. $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{R(u,v)}{u^2+v^2}=0$

Allora:

$$d(\varphi, T_p(S)) = \frac{1}{2}\left[\langle \varphi_{uu}, N(p)\rangle u^2 + 2\langle \varphi_{uv}, N\rangle uv + \langle \varphi_{vv}, N(p)\rangle v^2\right] + \underbrace{\langle R, N(p)\rangle}_{\overline{R}(u,v)} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(e u^2 + 2fuv + g v^2)} + \overline{R} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{II}_p(u\varphi_u + v\varphi_v) + \overline{R}$$

dove $w := u\varphi_u + v\varphi_v$ è il vettore tang. di coord. (u,v). Al variare di (u,v), $P+w$ descrive un intorno del punto P sul piano tangente affine.

Allora se <u>P è ellittico</u>, $\mathrm{II}_p(w)$ è def. positiva opp. def. negativa e quindi ha segno costante $\Rightarrow d(Q, T_p(S))$ ha segno costante: un intorno di P sta tutto nello stesso semispazio.

Se P è iperbolico, la II ff è una forma indefinita; a seconda dei valori di (u,v) $\mathrm{II}_p(w)$ ha segno positivo oppure negativo, quindi T_pS attraversa la sup. S in un intorno di P.

Espressione delle curvature k_1, k_2, K, H in coordinate locali.

K è il determinante di $-d_pN$; quindi se (e_1, e_2) è una base di versori principali, ~~in~~ la matrice di $-d_pN$ è $M = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ e $K = k_1 k_2$. Oss che K è anche il det di d_pN.

Rispetto a (e_1, e_2) M è anche la matr. della $\underline{II}$ ff. Se invece la base usata è (φ_u, φ_v), associata a una carta locale (U, φ), la matrice della $\underline{II}$ ff è $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$;

mentre la matrice di $+d_pN$ è del tipo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Vogliamo esplicitare ~~esprimere~~ la relazione tra queste ultime matrici.

Si ha:

$$d_pN(\varphi_u) = N_u = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$
$$d_pN(\varphi_v) = N_v = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

Allora:

$$-e = \langle N_u, \varphi_u \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \varphi_u \rangle = \\ = a_{11}E + a_{21}F$$

$$-f = \langle N_u, \varphi_v \rangle = \langle a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v, \varphi_v \rangle = \\ = a_{11}F + a_{21}G$$
$$= \langle N_v, \varphi_u \rangle = \langle a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, \varphi_u \rangle = \\ = a_{12}E + a_{22}F$$

$$-g = \langle N_v, \varphi_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G$$

Questo si può scrivere in forma matriciale:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e quindi $A = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} +G & -F \\ -F & +E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Allora $K = |A| = \dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}$.

Inoltre: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} eG-fF & fG-gF \\ fE-eF & -fF+gE \end{pmatrix}$

e quindi $a_{11} = \dfrac{fF-eG}{EG-F^2}$

$$a_{12} = \frac{gF-fG}{EG-F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2}$$

$$a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}$$

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{fF-eG+fF-gE}{EG-F^2} \right) =$$

$$= \frac{eG-2fF+gE}{2(EG-F^2)}$$

Queste sono dette equazioni di Weingarten.

Conseguenze

1) P è ellittico $\Longleftrightarrow eg-f^2>0$

iperbolico $\Longleftrightarrow eg-f^2<0$

2) $f=0 \Longleftrightarrow N_u \perp \varphi_v \Longleftrightarrow N_v \perp \varphi_u$

$F=0 \Longleftrightarrow \varphi_u \perp \varphi_v$

$f=F=0 \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} N_u \perp \varphi_v \\ \varphi_u \perp \varphi_v \end{array}\right\}$ sono tutti tangenti

dunque $N_u \parallel \varphi_u$, e analogam. $N_v \parallel \varphi_v$

Quindi $d_pN(\varphi_u)=\lambda\varphi_u$ e $d_pN(\varphi_v)=\mu\varphi_v$

$\Rightarrow \varphi_u, \varphi_v$ sono autovettori di d_pN, quindi le direzioni delle curve coordinate sono direzioni principali.

In tal caso $K=\frac{eg}{EG}$, $H=\frac{1}{2}\frac{eG+Eg}{EG}$.

3) H, K sono funzioni differenziabili di (u,v), esprimibili nei termini dei coeff della I e II ff

4) calcolo di k_1 e k_2.

Oss. che $P_A(t)=t^2-(a_{11}+a_{22})t+|A|=$
$=t^2-2tH+K$

$k_{1,2}=H\pm\sqrt{H^2-K} \Rightarrow k_1,k_2$ sono funz. differenziabili di (u,v) escluso dove $H^2=K$.

Ma se $H^2=K$ si ha $k_1=k_2$: ombelichi.

5) Se $e=f=g=0$, $K\equiv 0, H\equiv 0$, $k_1=k_2=0$ punto planare

Superfici minime

Sono le sup. regolari con $H \equiv 0$.

Se $H(P) = 0$, tenuto conto della formula di Eulero $k_n(\vartheta) = k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \sin^2\vartheta$, si ottiene, essendo $k_2 = -k_1$,

$$k_n(\vartheta) = k_1 \cos^2\vartheta - k_1 \sin^2\vartheta .$$

Allora le direzioni asintotiche hanno $k_n(\vartheta) = 0$ $\Longleftrightarrow tg^2\vartheta = 1 \Longleftrightarrow \vartheta = \pm\frac{\pi}{4}$: le direzioni asintotiche sono ortogonali e bisettrici delle direzioni principali.

Inoltre:

$$H = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)}$$

da questa espressione segue il significato di minimalità.

Sia (U, φ) una carta locale, e $D \subset U$ un aperto connesso limitato, sia $h: \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funz. differenziabile $(\overline{D} \subset U)$.

Def: variazione normale di $\varphi(\overline{D})$ associata ad h la funzione (def. per ε piccolo da precisare)

$$\psi: \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad t.c.$$

$$\psi(u, v, t) = \varphi(u, v) + t h(u, v) N(u, v) :$$

ho così una famiglia di superfici, parametrizzata da t: $\forall\ \overline{t}$ c'è $\psi_{\overline{t}}: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \longrightarrow \psi(u, v, \overline{t})$

t.c. $(\psi_{\overline{t}})_u = \varphi_u + \overline{t} h_u N(u, v) + \overline{t} h N_u$

$$(\psi_{\overline{t}})_v = \varphi_v + \overline{t} h_v N + \overline{t} h N_v .$$

I coeff. della I ff sono:

$$E_t = \langle (\varphi_t)_u, (\varphi_t)_u \rangle =$$

$$= E + 2\,t\,h(-e) + t^2 h_u^2 + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle$$

perché $\langle \varphi_u, N \rangle = \langle N, N_u \rangle = 0$

$$F_t = \dots = F + t\,h(-2f) + t^2 h_u h_v + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle$$

$$G_t = \dots = G + 2th\,(-g) + t^2 h_v^2 + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle.$$

$$E_t G_t - F_t^2 = EG - F^2 - 2th(Eg + eG - 2fF) + R$$

dove R parte da t^2, e quindi $\lim_{t \to 0} \frac{R}{t} = 0$;

$$= EG - F^2 - 2thH \cdot 2(EG - F^2) + R =$$

$$= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R =$$

$$= (EG - F^2)(1 - 4thH + \overline{R}),$$

con $\overline{R} = \dfrac{R}{EG - F^2}$.

Se t è suff. piccolo, questa quantità ha lo stesso segno di $EG - F^2 > 0 \Rightarrow$ la param. φ_t è regolare: ciò determina ε.

Calcoliamo l'area di $\varphi_t(\overline{D})$:

$$A(t) = \int_{\overline{D}} \sqrt{E_t G_t - F_t^2}\, du\,dv =$$

$$= \int \sqrt{1 - 4thH + \overline{R}}\, \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv$$

k $t<\varepsilon$, $A(t)$ è differenziabile e

$$A'(0) = \int_{\bar D} \frac{1}{2\sqrt{}}\Big|_{t=0} (-4hH)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv =$$

↓ derivo sotto il segno d'integrale e calcolo in $t=0$

$$= \int_{\bar D} -2hH\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

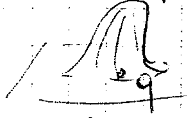
Da cui si può dire:

Teorema (Meusnier 1776)

$\varphi(u,v)$ è una sup minima $\Leftrightarrow \forall D, h, \varepsilon$ suff. piccolo si ha $A'(0)=0$.

Dim. Se φ è minima $\Rightarrow H\equiv 0 \Rightarrow A'(0)=0$

Vicev. se $A'(0)=0$ e se per assurdo $H(q)\neq 0$ per $q\in D$, prendiamo $h:\bar D \to \mathbb{R}$ una funz. t.c. $h(q)=H(q)$, h sia sempre ≥ 0 o sempre ≤ 0, ma h sia sempre identicamente nulla al di fuori di un piccolo intorno di q



]. Allora sotto integrale ho $-2H^2$, ~~[illegible]~~ valore in q, e poi va a 0 $\Rightarrow$ $A'(0)<0$: assurdo. ∎

Questa prop si può esprimere dicendo che ogni regione limitata $\varphi(\bar D)$ di S minima è un punto critico per la funzione area, una volta fissato il bordo.

Ma oss. che non nec. $A(t)$ ha un minimo per $t=0$, ci sono controesempi (Pressley p. 30f catenoide)

La terminologia risale a Lagrange 1760 (eq. di Eulero-Lagrange del calcolo delle variazioni).

Sono sup. minime le lamine saponate, con contorno assegnato.
Esempi: elicoide e catenoide.

1) elicoide

$$\varphi(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ au).$$

$$E = a^2+v^2,\quad F=0,\quad G=1$$

$$e=0,\quad f=\frac{a}{a^2+v^2},\quad g=0$$

$$H=0,\quad K=-\frac{a^2}{(a^2+v^2)^2}<0$$

È l'unica sup. minima rigata

2) catenoide, si ruota $x = a\cosh\frac{z}{a}$ intorno all'asse z, $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$.

È l'unica sup. minima di rotazione.

$$\varphi(u,v) = \left(a\cosh\frac{u}{a}\cos v,\ a\cosh\frac{u}{a}\sin v,\ u\right)$$

$$\varphi_u = \left(\sinh\left(\frac{u}{a}\right)\cos v,\ \sinh\left(\frac{u}{a}\right)\sin v,\ 1\right)$$

$$\varphi_v = \left(-a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\sin v,\ a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\cos v,\ 0\right)$$

$$\varphi_u\wedge\varphi_v = \left(-a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\cos v,\ a\cosh\left(\frac{u}{a}\right)\sin v,\ 2a\cosh\sinh\right)$$

$$\|\varphi_u\wedge\varphi_v\|^2 = a^2\cosh^2 + 4a^2\cos^2\sin^2 > 0$$

$$\varphi_{uu} = \left(\frac{1}{a}\cosh\cos v,\ \frac{1}{a}\cosh\sin v,\ 0\right)$$

$$\varphi_{uv} = (-\sinh\sin v,\ \sinh\cos,\ 0)$$

$$\varphi_{vv} = (-a\cosh\cos v,\ -a\cosh\sin v,\ 0)$$

$E = \operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{a}\right) + 1 = \cosh^2 \frac{u}{a}$

$F = 0$

$G = a^2 \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)$

$e = -\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)$

$f = 0$

$g = a^2 \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)$

$K < 0, \; H = 0$

Problema di Plateau: data una curva chiusa, trovare ~~la~~ sup. minime di cui è bordo.
Esistenza: dim. da Radó e Douglas (1930)

Superfici con tutti ombelichi.

Teo: S sia una sup. connessa regolare t.c. ogni punto di S è un ombelico.
Allora S è (una porzione di) un piano o una sfera. Se in particolare S è compatta, allora S è una sfera.

Dim: Sia $\varphi(u,v)$ una carta locale in P connessa.
Allora $\forall Q \in \varphi(U)$ $\quad d_Q N : T_Q S \to T_Q S$ è un'omotetia, sia $\lambda(Q)$ il relativo autovalore: si ha $d_Q N(w) = \lambda(Q)\, w \quad \forall\, w \in T_Q S$.
Ho così una funz $\lambda(u,v)$, derivabile ~~differenziabile~~ ($\lambda = H$)
Claim λ è costante su $\varphi(U)$.
Infatti $d_{\varphi(u,v)} N(\varphi_u) = N_u = \lambda(Q)\varphi_u = \lambda(u,v)\varphi_u$

$d_{\varphi(u,v)} N(\varphi_v) = N_v = \lambda(u,v)\varphi_v \implies$

$N_{uv} = \lambda_v \varphi_u + \lambda \varphi_{uv}$ $\Big\} \implies \lambda_v \varphi_u - \lambda_u \varphi_v = 0$ su U

$N_{vu} = \lambda_u \varphi_v + \lambda \varphi_{vu}$

Ma φ_u, φ_v sono lin indip. $\Rightarrow d_u = d_v = 0 \quad \forall u,v$
Ma U è connesso $\Rightarrow \lambda$ è cost su U.

Ora distinguiamo i casi $\lambda \equiv 0$ e $\lambda \neq 0$.

a) Se $\lambda \equiv 0$ $\quad d_P N = 0 \quad \forall P \in \varphi(U)$

$\Updownarrow$

$N_u = N_v = 0$ e quindi N è costante su $\varphi(U)$: $N(u,v) = N(u_0,v_0)$ con $P_0 = \varphi(u_0,v_0)$

Consid. $\langle \varphi(u,v) - \varphi(u_0,v_0), N_0 \rangle$: vogliamo dim. che è costante. In effetti se lo derivo risp. a u trovo

$\langle \varphi_u, N_0 \rangle = 0$, e analogamente
$\langle \varphi_v, N_0 \rangle = 0$

Quindi il prod. scalare è cost, ma per $(u,v) = (u_0,v_0)$ si annulla $\Rightarrow$ è id. nullo $\Rightarrow$ quindi
$\varphi(u,v) \in$ piano tg in P_0 a $S \Rightarrow \varphi(U) \subset T_{P_0} S$.

b) Se λ è una cost $\neq 0$, consid.
$\varphi(u,v) - \frac{1}{\lambda} N(u,v)$ e dim. che è costante:

derivo risp. a u e a v e trovo

$$\varphi_u - \frac{1}{\lambda} N_u = \varphi_u - \frac{1}{\lambda}(d_P N(\varphi_u)) =$$
$$= \varphi_u - \frac{1}{\lambda}(\lambda \varphi_u) = 0;$$

$$\varphi_v - \frac{1}{\lambda} N_v = \varphi_v - \frac{1}{\lambda}(\lambda \varphi_v) = 0.$$

Sia $C := \varphi(u,v) - \frac{1}{\lambda} N(u,v)$:

$\| \varphi(u,v) - C \|^2 = \| \frac{1}{\lambda} N(u,v) \| = \left| \frac{1}{\lambda} \right|$: $\varphi(U)$ è contenuto nella sfera di centro C e raggio $\frac{1}{|A|}$.

Quindi ogni punto ha un intorno coordinato contenuto in un piano o in una sfera. Poiché S è connessa, 2 intorni si intersecano $\Rightarrow$ la proprietà è vera anche globalmente. ∎

— o —

Linee di curvatura e linee asintotiche.

Def. Una curva $\alpha(t) \subset S$ regolare, t.c. $\forall$ $P = \alpha(t)$ la direzione della retta tangente $\alpha'(t)$ è una direzione principale su S in P, è detta <u>linea di curvatura</u>

<u>ES</u>: se $f = F = 0$ identicamente su una carta (U, φ), le linee coord. sono linee di curvatura.

<u>Teorema</u> di Olinde Rodrigues

S regolare orientata

una curva contenuta in S è una linea di curvatura se ammette una parametrizzaz. $\alpha(t)$ t.c., posto $N(t) = N(\alpha(t))$, si ha $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$, per $\lambda(t)$ opportuna funz. differenziabile def. su I intervallo di def. di $\alpha(t)$

Dim: se $\alpha'(t) \parallel$ direz. principale $\Rightarrow \alpha'(t)$ è autovettore per d_pN: $d_pN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$ con $\lambda(t) = -k_1(t)$ opp. $-k_2(t)$.

Vicev. se $\exists \lambda(t)$ con $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t) \Rightarrow \alpha'(t)$ è autovettore di d_pN e quindi la sua direzione è principale. ∎

Def. Una curva regolare è detta __curva asintotica__ se in ogni suo punto la direzione tangente è una direz. asintotica.

Supp. $\alpha(s)$ sia una curva asintotica parametrizz. con param. naturale s, allora

$k_n(\alpha'(s)) = 0 \quad \forall s \in I$.

Questo si può riscrivere così:

$k_n(\alpha'(s)) = \langle -d_pN(\alpha'(s)), \alpha'(s) \rangle =$

$= \langle -N'(s), \alpha'(s) \rangle = \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0$:

l'accelerazione è sempre tangente a S.

Se $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$, $\alpha' = u'\varphi_u + v'\varphi_v$ e

$k_n(\alpha') = \mathrm{II}_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2 = 0$

__equazione differenziale__ delle ~~geodetiche~~ curve asintotiche (anche con param. q.que t), u, v funz. incognite

__Oss.__ che se $\alpha(s)$ è asintotica, α' e α'' sono entrambi tangenti a S; allora se $\alpha' \wedge \alpha'' \neq 0$ (punti non di flesso) il piano osculatore di $\alpha(s)$ coincide con il piano tang a S in $\alpha(s)$.

Def. Una curva regolare parametrizzata $\alpha(t)$ è una __geodetica__ se $\alpha''(t)$, l'accel., è sempre ortogonale a S, cioè $\alpha''(t) \parallel N(\alpha(t))$: l'accelerazione non viene percepita dall'interno di S.

OSS. Se $\alpha(t)$ è una geodetica $\Rightarrow \alpha''$ è ortog. a T_pS quindi in partic. $\alpha'' \perp \alpha' \Rightarrow$
$\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0 \Rightarrow \|\alpha'\|$ è costante:
le geodetiche sono curve parametrizzate con velocità costante.
"Essere geodetiche dipende dalla parametrizzazione".

OSS. 1) se $\alpha(t) = P + v t$ retta $\Rightarrow \alpha'' = 0$ geodetica

2) Se $S = \pi$ è un piano, le uniche geodetiche sono rette. Infatti sia N costante, ortog. a π:
Se $\alpha(t)$ è geodetica $\exists$ $c(t)$ t.c.
$\alpha''(t) = c(t) N$. Ma $\langle \alpha'(t), N \rangle \equiv 0$
$\Rightarrow \langle \alpha'', N \rangle + \cancel{\langle \alpha', N' \rangle} = 0 = c(t) \langle N, N \rangle =$
$= c(t)$. Quindi $\alpha''(t) \equiv 0 \Rightarrow \alpha'$ cost
$\Rightarrow \alpha$ è lineare.
Di più sulle geodetiche in seguito.

Equazione di Gauss per K – simboli di Christoffel.
S regolare, orientata, (U, φ) carta locale
Abbiamo il triedro $\varphi_u, \varphi_v, N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$
Vogliamo esprimere i loro derivati risp. a u e v in funz. di φ_u, φ_v, N: analogo alle formule di Frenet.