è sempre ortogonale a S, cioè $\alpha''(t) \parallel N(\alpha(t))$: l'accelerazione non viene percepita dall'interno di S.

<u>Oss</u> Se $\alpha(t)$ è una geodetica $\Rightarrow$ α'' è ortog. a T_pS quindi in partic. $\alpha'' \perp \alpha'$ $\Rightarrow$ $\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$ $\Rightarrow$ $\|\alpha'\|$ è costante:
le geodetiche sono curve parametrizzate con velocità costante.
"Essere geodetiche dipende dalla parametrizzazione".

<u>Oss</u> 1) se $\alpha(t) = P + vt$ retta $\Rightarrow \alpha'' = 0$: geodetica
2) Se $S = \pi$ è un piano, le uniche geodetiche sono rette. Infatti sia N costante, ortog. a π.
Se $\alpha(t)$ è geodetica $\exists$ $c(t)$ t.c. $\alpha''(t) = c(t) N$. Ma $\langle \alpha'(t), N \rangle \equiv 0$
$\Rightarrow \langle \alpha'', N \rangle + \cancel{\langle \alpha', N' \rangle} = 0 = c(t) \langle N, N \rangle =$
$= c(t)$. Quindi $\alpha''(t) \equiv 0 \Rightarrow \alpha'$ cost
$\Rightarrow$ α è lineare.
Di più sulle geodetiche in seguito.

— o —

Equazione di Gauss per K - simboli di Christoffel.
S regolare, orientata, (U, φ) carta locale
Abbiamo il triedro $\varphi_u, \varphi_v, N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$
Vogliamo esprimere i loro derivati risp. a u e v in funz. di φ_u, φ_v, N: analogo alle formule di Frenet.

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N$$

$$\shortparallel$$

$$\varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + \overline{L}_2 N$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N$$

$$\left.\begin{array}{l} N_u = a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v \\ N_v = a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v \end{array}\right\} \text{coeff. già calcolati, equaz. di Weingarten}$$

$\{\Gamma_{ij}^k,\ i,j,k = 1,2\}$ simboli di Christoffel di S in φ.

$\varphi_{uv} = \varphi_{vu} \Rightarrow \Gamma_{12}^i = \Gamma_{21}^i$ e $L_2 = \overline{L}_2$.

Vogliamo det. i Γ_{ij}^k e L_1, L_2, L_3.

- $\langle \varphi_{uu}, N \rangle = -\underbrace{\langle \varphi_u, N_u \rangle}_{=e} = \langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N, N \rangle = L_1$

Analogam. $L_2 = f$, $L_3 = g$.

- $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \langle \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + e N, \varphi_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$

Ma $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E \Rightarrow 2\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = E_u$.

Perciò $\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u$ (1)

- $\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$

Ma $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = F \Rightarrow \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle = F_u$

$E_v = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle$

$$\Rightarrow \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle$$
$$= F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\Rightarrow \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G = F_u - \frac{1}{2} E_v \quad (2)$$

Ho trovato un sistema in $\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}$: il det della matrice è $EG - F^2 \neq 0 \Rightarrow \Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11}$ si esprimono in funz. di E, F, G e delle loro derivate univocamente

Analogamente:

$$\begin{cases} \Gamma^1_{12} E + \Gamma^2_{12} F = \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma^1_{12} F + \Gamma^2_{22} G = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma^1_{22} E + \Gamma^2_{22} F = \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma^1_{22} F + \Gamma^2_{22} G = \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tutti i concetti esprimibili mediante i Γ^i_{jk} ~~sono~~ dipendono solo da E, F, G.

Es 1. nel caso del cilindro: $E_u = E_v = F_u = F_v = G_u = G_v = 0$
$\Rightarrow \Gamma^i_{jk} = 0 \quad \forall i, j, k$.

Abbiamo quindi che le derivate di φ_u, φ_v, N, espresse nella intera base, fanno intervenire i coeff E, F, G, e, f, g e loro derivate.

Continuiamo a derivare:

$$\begin{cases} (\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u = 0 \\ (\varphi_{vv})_u - (\varphi_{uv})_v = 0 \\ N_{uv} - N_{vu} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo, troveremo un'espressione per K in funzione solo dei coeff. della I ff.

$$(\Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + eN)_v - (\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN)_u = 0$$

$$(\Gamma^1_{11})_v\varphi_u + \Gamma^1_{11}\varphi_{uv} + (\Gamma^2_{11})_v\varphi_v + \Gamma^2_{11}\varphi_{vv} + e_vN + eN_v - (\Gamma^1_{12})_u\varphi_u - \Gamma^1_{12}\varphi_{uu} - (\Gamma^2_{12})_u\varphi_v - \Gamma^2_{12}\varphi_{vu} - f_uN - fN_u = 0.$$

Sostituiamo di nuovo e raccogliamo:

$$(\Gamma^1_{11})_v\varphi_u + \Gamma^1_{11}(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN) + (\Gamma^2_{11})_v\varphi_v + \Gamma^2_{11}(\Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + gN) + e_vN + e(a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v) - (\Gamma^1_{12})_u\varphi_u - \Gamma^1_{12}(\Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + eN) - (\Gamma^2_{12})_u\varphi_v - \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + fN) - f_uN - f(a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v) = 0$$

$$\left((\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + ea_{12} - (\Gamma^1_{12})_u - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - fa_{11}\right)\varphi_u +$$
$$+\left(\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + ea_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{12})^2 - fa_{21}\right)\varphi_v +$$
$$+\left(\Gamma^1_{11}f + \Gamma^2_{11}g + e_v - \Gamma^1_{12}e - \Gamma^2_{12}f - f_u\right)N = 0$$

Quindi tutti e tre i coeff. sono nulli, in partic. quello di φ_v che ci dà:

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 -$$
$$- \Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2 + e\,a_{22} - f\,a_{21} = 0$$

Ora sostituiamo:

$$a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2} \;:$$

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{22}^2 =$$
$$= -\frac{e\cancel{fF} - egE - e\cancel{fF} + f^2E}{EG-F^2} = -\frac{E(f^2-eg)}{EG-F^2} = EK$$

Siccome $E>0 \Rightarrow K$ è un'espress. dei coeff. della I ff, simboli di Christoffel e loro derivate, e quindi K dip. <u>solo</u> dalla I ff.

— . —

Geometria intrinseca delle superfici:
ossia che dipende solo dalla I ff

<u>Def</u> - Sia $F: S \to S'$ un diffeomorfismo tra 2 sup. regolari.
F è un'<u>isometria</u> tra S e S' se $\forall\, p \in S$, $\forall\, w_1, w_2 \in T_pS$ si ha $\langle w_1, w_2\rangle = \langle d_pF(w_1), d_pF(w_2)\rangle$
i differenziali di F conservano il prod. scalare, cioè sono isometrie vettoriali.
S, S' sono dette <u>isometriche</u>.
Equivalentemente: F conserva la norma dei vettori ossia la I ff (è la forma quadratica assoc. al prod. scalare).

$\Rightarrow\ I_p(w) = \langle w, w\rangle = \langle d_pF(w), d_pF(w)\rangle = I_{F(p)}(d_pF(w)) =$

$= \|d_P F(w)\|^2$

Def. un'isometria locale in P tra S e S' è $F: U \to S'$ differenziabile, dove U è un intorno ap. di P in S, t.c. F è isometria tra U e F(U).

S, S' sono dette localmente isometriche, se $\forall P \in S$ $\exists$ un'isom. locale in P tra un intorno di P in S e la sua immagine in S'.

Oss. se F è diffeom. e è un'isom. locale in ogni P, F è isometria

Prop Siano $\varphi: U \to S$, $\psi: U \to S'$ carte locali def. sullo stesso U, t.c. $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$. Allora $F := \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{\psi} S'$ è un'isometria locale.

$F: \varphi(u,v) \to (u,v) \to \psi(u,v)$

Dim. Oss. che $P = \varphi(u,v) \in \varphi(U)$ e $F(P) \in \psi(U)$ hanno le stesse coord. locali!

Quindi $F: (u,v) \to (u,v)$ in coord. locali e $JF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in ogni punto

Sia $w \in T_P S = u'\varphi_u + v'\varphi_v$, dove $(u(t), v(t))$ è una curva reg. in U t.c. w sia tang in P a $\varphi(u(t), v(t))$.

$d_P F(w) = u'\psi_u + v'\psi_v$, perché F in coord. loc. è l'identità.

Oss. che $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi = \psi^{-1} \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.

Allora w e $d_P F(w)$ hanno le stesse

Ma per ipotesi $E=E'$, $G=G'$, $F=F'$ $\Rightarrow$
$I_P(w) = I_{F(P)}(d_P F(w))$.

Esempio Piano e cilindro: S e S'
Piano: $\varphi = P_0 + u w_1 + v w_2$, con w_1, w_2 base ortonorm.

cilindro: $\psi = (\cos u, \sin u, v)$
$E=E'=1$, $F=F'=0$, $G=G'=1$.
Come U prendo: $(0, 2\pi)\times\mathbb{R}$
S e S' sono loc. isometriche tramite $\varphi^{-1}\circ\psi$ e $\psi^{-1}\circ\varphi$

$$P_0 + u w_1 + v w_2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} (u,v) \xrightarrow{\psi} (\cos u, \sin u, v)$$

Ma S, S' non sono diffeom. né omeomorfe perché $\pi_1(S) = (0)$ e $\pi_1(S') \neq (0)$.

Teorema Egregium di Gauss (~1823) (in Disquisitiones supra superficies curvas)
K è invariante per isometrie locali.
Dim.
Sia $P \in S$, $F: U_P \to S'$ un'isometria locale in P tra U_P e $F(U_P) \subset S'$, sia $F(P) = P'$.
Prendo (U, φ) carta locale su S con $\varphi(U) \subset U_P$:

$$\begin{array}{ccc} U_P & \xrightarrow{F} & S' \\ \varphi\uparrow & \nearrow_{\psi} & \\ U & & \end{array}$$

Allora $\psi = F\circ\varphi$ è una param. locale di S' in un intorno di $F(P)$, risp. alle carte (U,φ) e (U,ψ) P e $F(P)$ hanno le stesse coord. locali, d_PF ha matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Posso calcolare $K(P)$ e

$K(F(P))$ usando φ e i relativi E, F, G,
risp. ψ e i relativi E', F', G'.

Ma F è isometria, allora:

$$\underset{= E(u,v)}{E(P)} = \|\varphi_u\|^2 = \|d_pF(\varphi_u)\|^2 = \|\psi_u\|^2 = \overset{E'(u,v)}{E'(F(P))}$$

perché $d_pF(\varphi_u) = \psi_u$: prima colonna di $JF(u,v)$

e analogam. $F(u,v) = F'(u,v)$
$G(u,v) = G'(u,v)$.

Allora, per l'espressione di K trovata, si ha
$K(P) = K(F(P))$. ■

— · —

I ff $\longleftrightarrow$ geometria intrinseca, calcoli che si possono fare senza uscire da S, misurando angoli e lunghezze.

Th Egregium : K è una nozione intrinseca

II ff : esco dalla sup con N.

— · —

Abbiamo ottenuto l'espressione di K uguagliando a zero il coeff. di φ_v in $(\varphi_{uu})_v - \varphi_{uv}$...
k si considera quello di φ_u, si ottiene un'altra espressione in cui il coeff. di K è F.

Il coeff. di N dà la relazione

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$$

equazione di Codazzi - Mainardi.

Analogamente 3 equazioni da $(\varphi_{uv})_v = (\varphi_{vv})_u$
e 3 da $N_{uv} - N_{vu} = 0$
6 equazioni di Gauss
+ 3 " " Codazzi-Mainardi } equazioni di compatibilità.

Vale il <u>Teorema di Bonnet</u>
Date funzioni E, F, G, e, f, g definite su un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$, con $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$, e verificanti le 9 equazioni di compatibilità, $\forall (u_0, v_0) \in U$ $\exists$ $U' \subset U$ intorno di (u_0, v_0) e $\exists$ $\varphi : U' \longrightarrow \varphi(U') \subset \mathbb{R}^3$ diffeomorfismo t.c. $\varphi(U')$ è una sup. regolare avente E, F, G, e, f, g come coeff. della prima e II f.f. rispetto alla carta locale φ. Inoltre se U è connesso, $\varphi(u,v)$ è univocamente def. a meno di isometrie di $\mathbb{R}^3$.

— - —

<u>Osservazioni ed esempi</u>

1. Due superfici con curvatura gaussiana diversa non sono localmente isometriche.
Es. piano, sfera, sup. quadrica con $K < 0$ (iperboloide a una falda)

2. Per isometrie si conserva la lunghezza delle curve contenute nella superficie.
Infatti $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(\tau))}\, d\tau$

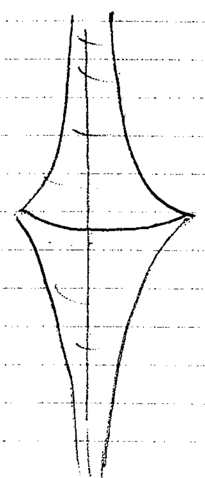
Si può def. la distanza fra 2 punti sulla sup. S come:

$d(P,Q) = \inf\{$ lunghezze delle curve regolari su S congiungenti P e Q $\}$

3. Esempio di superficie con $K \equiv -1$.

È la pseudosfera di Beltrami o trattroide, ottenuta facendo ruotare la trattrice intorno all'asse z.

$\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2})$, def. su $(0,\pi)$, non regolare in $t = \frac{\pi}{2}$.



$\varphi(u,v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v + \log \operatorname{tg} \frac{v}{2})$

$\varphi_u = (-\sin v \sin u, \sin v \cos u, 0)$

$\varphi_v = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, -\sin v + \frac{1}{\sin v})$

$E = \sin^2 v > 0$ su $(0,\pi)$

$F = 0$

$G = \cos^2 v + (\sin^2 v + \frac{1}{\sin^2 v} - 2) =$

$= -1 + \frac{1}{\sin^2 v} = \frac{\cos^2 v}{\sin^2 v}$, si annulla in $v = \frac{\pi}{2}$

S è regolare fuori da $\varphi(u, \frac{\pi}{2})$, cioè escludo i punti del piano $z = 0$

$EG - F^2 = \cos^2 v$.

$\varphi_{uu} = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, 0)$

$\varphi_{uv} = (-\cos v \sin u, \cos v \cos u, 0)$

$\varphi_{vv} = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, -\cos v - \frac{\cos v}{\sin^2 v})$

$\Rightarrow$ $e = \cancel{\langle(\cos v \sin v, \ldots), \ldots \rangle} = -\cos v \sin v$ (era giusto)

$f = 0$

$g = \cancel{\frac{\cos v}{\sin v}} \cancel{- \frac{1}{\sin v}} = \frac{\cos v}{\sin v}$

$K = -\frac{\cos^2 v}{\cos^2 v} = -1.$

Oss. che $F = f = 0$: le curve coordinate sono linee di curvatura.

Es. calcolare K per l'iperboloide $x^2 - y^2 = z$.
$\left(K = \frac{-4}{(1+4x^2+4y^2)^2} \right)$

4. Def. una mappa conforme è un diffeomorfismo F t.c. $\forall P$, $\forall\, w_1, w_2 \in T_pS$,
$\langle d_pF(w_1), d_pF(w_2) \rangle \overset{(*)}{=} \lambda^2(P) \langle w_1, w_2 \rangle$,
dove λ è una funz. differenziabile mai nulla su S.

F conserva gli angoli ma non le lunghezze, infatti, detti ϑ l'angolo di w_1 e w_2 e ϑ' l'angolo di $d_pF(w_1)$ e $d_pF(w_2)$, si ha:

$$\cos\vartheta' = \frac{\langle d_pF(w_1), d_pF(w_2) \rangle}{\|d_pF(w_1)\| \, \|d_pF(w_2)\|} = \frac{\lambda^2(P)\langle w_1, w_2 \rangle}{|\lambda(P)| \, \|w_1\| \, |\lambda(P)| \, \|w_2\|} = \cos\vartheta.$$

perché (*) vale anche con $w_1 = w_2$.

Si dimostra il Teorema: 2 sup. regolari sono sempre localmente conformi.

5. Catenoide e elicoide sono localmente isometriche.

catenoide: $\varphi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$

$\varphi_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$

$$\begin{cases} E = \cosh^2 u \\ F = 0 \\ G = \cosh^2 u \end{cases}$$

<u>Elicoide</u> $\varphi(u,v) = (v\cos u,\, v\sin u,\, au),\ a>0$

$\varphi_u = (-v\sin u,\ v\cos u,\ a)$

$\varphi_v = (\cos u,\ \sin u,\ 0)$

$E = v^2 + a^2$, $F = 0$

$G = 1$

$EG - F^2 = v^2 + a^2$

Riparametrizzo l'elicoide ponendo

$$\begin{cases} u = \bar{u} \\ v = a\sinh(\bar{v}) \end{cases}$$

<u>sinh</u> è una funz. monotona strettam. crescente

$\varphi(\bar{u},\bar{v}) = (a\cos\bar{u}\sinh(\bar{v}),\ a\sin\bar{u}\sinh(\bar{v}),\ a\bar{u})$

$\Rightarrow E = a^2\cosh^2 v,\quad F = 0,\quad G = a^2\cosh^2 v$

Se $a = 1$ si ottiene un'isom. locale componendo φ^{-1} con φ, o viceversa.

Se invece uso la param. precedente, non ottengo un'isometria né la stessa curvatura gaussiana.

6. Vale teor. di Minding: 2 sup. regolari con la stessa curvatura gaussiana <u>costante</u> sono localm. isometriche (es. piano e rigate svilupp.)
Ma esistono sup. con la stessa funz. K non

si chiamano le [illegible]

Superfici rigate

<u>Def</u>: una famiglia di rette a un parametro è il dato di una curva regolare $\alpha(t)$, def. su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, e di un vettore $w(t)$, funz. diff. di t def. su I, con $w(t) \neq 0$ $\forall t \in I$.
Allora $\forall t$ si ha la retta L_t, passante per $\alpha(t)$ e parallela a $w(t)$.
L'unione delle rette L_t è parametrizzata da
$\varphi(t,v) = \alpha(t) + v\, w(t)$, $t \in I$, $v \in \mathbb{R}$:
<u>superficie rigata</u>

È una sup. differenziabile param., non necess. regolare.
L_t = generatrice, si ottiene per t costante (ruling)
$\alpha(t)$ = direttrice, si ottiene per $v = 0$.

<u>Esempi</u>

1. sviluppabile delle tangenti
$$\varphi(t,v) = \alpha(t) + v\,\alpha'(t) \quad , \quad w = \alpha'$$

2) cilindro: $w(t)$ è parallelo a una direz. fissata $\forall t$, si può supp. $w(t)$ costante
$$\varphi(t,v) = \alpha(t) + v w.$$
3) Cono: le rette passano tutte per un punto V vertice : $\varphi(t,v) = V + v\,w(t)$
opp $\varphi(t,v) = \alpha(t) + v\,(\alpha(t) - V)$.
4) elicoide: $\alpha(t) = (0,0,t) + v\,(\cos t, \sin t, 0)$

Data $\varphi(t,v) = \alpha(t) + v\, w(t)$, si ha:

$$\varphi_t = \alpha' + v w' \qquad \varphi_t \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge w + v\, w' \wedge w$$

$$\varphi_v = w(t)$$

$$\varphi_{tt} = \alpha'' + v w''$$

$$\varphi_{tv} = w'$$

$$\varphi_{vv} = 0$$

$$f = \frac{(\varphi_t, \varphi_v, \varphi_{tv})}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|} = \frac{(\alpha' + v w', w, w')}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|} =$$

$$= \frac{(\alpha', w, w')}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|}$$

$$g = \frac{(\varphi_t, \varphi_v, \varphi_{vv})}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|} = 0$$

e quindi $K = \dfrac{-f^2}{EG - F^2} \leq 0$.

Se $w' = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow K \equiv 0$: questo accade nel cilindro.

Nel cono si può prendere $\alpha(t) = V$ (non regolare), quindi $\alpha' = 0 \Rightarrow f = K \equiv 0$.

Nella sviluppabile tangente,

$$(\alpha', w, w') = (\alpha', \alpha', \alpha'') \equiv 0 \Rightarrow K \equiv 0.$$

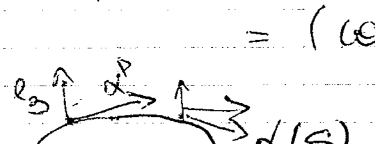
Esempio con $K \not\equiv 0$.

$\alpha(s)$ circ unitaria nel piano x, y
con s param. naturale

$$w(s) = \alpha'(s) + (0,0,1) = \alpha'(s) + e_3$$

$$\varphi(s,v) = (\cos s, \sin s, 0) + v(-\sin s, \cos s, 1)$$

$$= (\cos s - v \sin s, \sin s + v \cos s, v)$$



$\varphi(s,v)$ verifica l'equazione $x^2+y^2=1+z^2$: iperboloide a una falda.

~~$f\neq 0$~~ $\varphi_s = (-\sin s - v\cos s,\ \cos s - v\sin s, 0)$

$\varphi_v = (-\sin s,\ \cos s,\ 1)$

$E = 1+v^2$

$F = 1$

$G = 2 \qquad\qquad EG-F^2 = 1+2v^2$

$\varphi_{sv} = (-\cos s, -\sin s, 0)$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+2v^2}} \begin{vmatrix} -\sin s - v\cos s & \cos s - v\sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 1 \\ -\cos s & -\sin s & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+2v^2}} \left(\sin^2 s + \cancel{v\sin s\cos s} + \cos^2 s - \cancel{v\sin s\cos s}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+2v^2}} \quad : \text{è sempre } \neq 0.$$

<u>Def</u>. una sup. rigata S è detta sviluppabile se $(\alpha', w, w') \equiv 0 \iff$
$f \equiv 0 \iff K \equiv 0$.

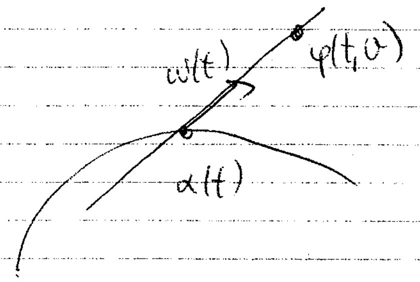
Lo sono i cilindri, i coni, le sviluppab. tangenti.

<u>Prop</u>. S è rigata sviluppabile $\iff \forall P\in S$ il piano tangente T_pS rimane fisso al variare di P sulla generatrice passante per P. Se $P=\varphi(\bar t,\bar v)$

Dim:

Sia $P = \varphi(t,v) = \alpha(t) + v\,w(t)$

$T_{\varphi(t,v)} S$ è parallelo a $\varphi_t = \alpha' + v w'$ e
$\varphi_v = w(t)$



$\Rightarrow$ contiene la retta
$g : \alpha(t) + \langle w(t) \rangle$
generatrice per $\alpha(t)$ e
quindi appartiene al fascio di sostegno g.

Posto $X = (x, y, z)$, l'equaz si può scrivere:

$$(X - \varphi(t,v),\ \alpha' + v w',\ w(t)) = 0$$

perché $X \in T_{\varphi(t,v)} S \iff$ il vettore $X - \varphi(t,v)$
appartiene alla giacitura di φ_t e φ_v.

$$(X - \alpha(t) - v\,w(t),\ \alpha' + v w',\ w(t)) = 0$$
$$\shortparallel$$
$$(X - \alpha(t),\ \alpha' + v w',\ w(t)) = 0$$
$$\shortparallel$$
$$\underset{(1)}{(X - \alpha(t),\ \alpha',\ w(t))} + v\,\underset{(2)}{(X - \alpha(t),\ w',\ w)} = 0$$

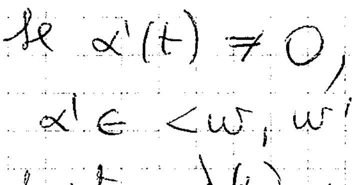
Al variare di v ho una combinaz. lin. di 2 equazioni, ci sono 2 casi:

a) se (1) e (2) sono equazioni di due piani distinti, $T_P S$ varia nel fascio di sostegno g; (1) è il piano tang a S in $\alpha(t) = \varphi(t,0)$, (2) è detto piano asintotico di g

b) se (1) e (2) coincidono, opp una delle 2 non rappresenta un piano, T_pS resta fisso lungo g, e g è detta generatrice regolare.
Q. accade $\Leftrightarrow$ α', w, w' sono lin. dip.
$\Leftrightarrow (\alpha', w, w') = 0$.
Questo accade per ogni punto di $S \Leftrightarrow S$ è sviluppabile.

Supp. S sia una rigata sviluppabile $(\alpha', w, w') = 0$.
Supp. $\|w(t)\| = 1$: allora w' è ortog. a w.
Se su S si ha $w \wedge w' \equiv 0 \Rightarrow w' = 0$ e quindi w è costante, S è un cilindro.

Se $w \wedge w' \neq 0$, allora $w' \neq 0$. Consid. $\alpha'(t)$: se $\alpha'(t) \equiv 0$ $\alpha(t)$ è cost e S è un cono.
Se $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha' \perp (w \wedge w')$ e quindi $\alpha' \in \langle w, w' \rangle$. Allora $\exists$ 2 funzioni di t, $\lambda(t), \mu(t)$ t.c. $\alpha'(t) = \lambda(t) w(t) + \mu(t) w'(t)$.
Consideriamo la curva
Γ : $\alpha(t) - \mu(t) w(t)$, è una curva $\subseteq S$.



Se Γ si riduce a un punto $\Rightarrow$ cono.
Altrimenti consid.
$$\Gamma' = \alpha' - \mu' w - \mu w' = \lambda w + \cancel{\mu w'} - \mu' w - \cancel{\mu w'} = (\lambda - \mu') w$$
Allora la tangente a Γ coincide con la

generatrice per $\alpha(t) \Rightarrow S$ è la sviluppabile delle tangenti di Γ.

Equazioni differenziali delle geodetiche.

Sia S parametrizzata da $\varphi(u,v): U \longrightarrow S$.
cerco funzioni $u(t), v(t)$ t.c. $\varphi(u(t), v(t))$ sia geodetica.

Pongo $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$.

Allora $\gamma'(t) = u'\varphi_u + v'\varphi_v$

$$\gamma''(t) = u''\varphi_u + v''\varphi_v + u'\frac{d}{dt}\varphi_u + v'\frac{d}{dt}\varphi_v =$$

$$= u''\varphi_u + v''\varphi_v + u'(u'\varphi_{uu} + v'\varphi_{uv}) +$$
$$+ v'(u'\varphi_{uv} + v'\varphi_{vv}) =$$
$$= u''\varphi_u + v''\varphi_v + (u')^2\varphi_{uu} + 2u'v'\varphi_{uv} + (v')^2\varphi_{vv}$$

Vogliamo imporre che γ'' sia parallelo a N, allora lo scriviamo come comb. lin. di φ_u, φ_v, N, usando i simboli di Christoffel, e poi imponiamo l'annullamento dei coeff. di φ_u e φ_v

$$\gamma''(t) = u''\varphi_u + v''\varphi_v + (u')^2(\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN) +$$
$$+ 2u'v'(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN) +$$
$$+ (v')^2(\Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + gN)$$

Le equazioni sono:

$$\begin{cases} u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

In partic. per verif. se γ è una geodetica, bisogna controllare che il sistema sia soddisfatto in ogni intorno coordinato.

Esempi

1. Se S è una sfera e γ una param. in lunghezza d'arco di una cf max, l'accelerazione sta nel piano osculatore, cioè nel piano di γ, e ha direz normale alla tg, quindi è $\parallel N$

2. S cilindro $x^2+y^2=r^2$

$$\varphi(u,v)=(r\cos u,\ r\sin u,\ v)$$

Sia $\alpha(t)=(r\cos u(t),\ r\sin u(t),\ v(t))$, con t param. naturale.

$\varphi_u=(-r\sin u,\ r\cos u,\ 0)$

$\varphi_v=(0,0,1)$

$\varphi_u\wedge\varphi_v=(r\cos u,\ r\sin u,\ 0)$

α'' dev'essere parallelo a $\varphi_u\wedge\varphi_v$:

$\alpha'=(-r\sin u(t)\,u'(t),\ r\cos u(t)\,u',\ v'(t))$

$\alpha''=(\ -\ \ -\ \ -\ \ -\ ,\ v''(t))$

$\Rightarrow v''(t)=0,\quad v'=a$ costante, $v=at+b$

Inoltre $\|\alpha'(t)\|=1 \Rightarrow r^2u'^2+v'^2=r^2u'^2+a^2=1$

$\Rightarrow u'(t)$ è costante $\Rightarrow u(t)=\alpha t+\beta$

$\alpha(t)=(r\cos(\alpha t+\beta),\ r\sin(\alpha t+\beta),\ at+b)$

sono le immagini delle rette del piano.

se $\alpha=0$: retta generatrice

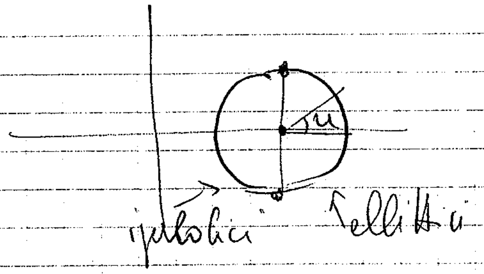
se $a=0$ cf

Altrimenti si trova un'elica.

3. Se $\alpha(s)$ è piana, s param. naturale, e il piano è ortogonale a S in ogni punto di α $\Rightarrow \alpha(s)$ è geodetica.

Cor: su una sup. di rotazione tutti i meridiani sono geodetiche.

Esempio toro



$$\begin{cases} x = (R + r\cos u)\cos v \\ y = (R + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$$

$E = r^2,\ F = 0,\ G = (R + r\cos u)^2$

$EG - F^2 = r^2(R + \cos u)^2$

$e = r$

$f = 0$

$g = (R + r\cos u)\cos u$

$K = \dfrac{\cos u}{r(R + r\cos u)}$ dove $R + r\cos u > 0\ \forall u$.

$$\cos u \text{ è } \begin{cases} > 0 & 0 < u < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & u = \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \frac{\pi}{2} < u < \frac{3}{2}\pi \\ = 0 & u = \frac{3}{2}\pi \\ > 0 & \frac{3}{2}\pi < u < 2\pi \end{cases}$$

$u = \dfrac{\pi}{2}$, $K = 0$, $H = \dfrac{1}{2rR} > 0$

$\Rightarrow$ punti parabolici

Calcolare i simboli di Christoffel.

$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{11} = 0 = \Gamma^1_{11}$

$\Gamma^2_{12} = \dfrac{-r\sin u}{R + r\cos u}$, $\Gamma^1_{22} = \dfrac{(R + r\cos u)\sin u}{r}$

Equaz. diff. per le geodetiche:

$$\begin{cases} u'' + v'^2 \Gamma^{2}_{12} = 0 \\ v'' + 2u'v' \Gamma^{2}_{12} = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni sono verificate per esempio se v è costante e u è lineare; si ottiene così una parametrizzazione dei meridiani a velocità costante.

Una superficie è detta geodeticamente completa se ogni geodetica può essere prolungata in modo da essere definita su tutta la retta reale. La pseudosfera non lo è. Vale il seguente teorema di D. Hilbert (1901):
Non esiste in R^3 una superficie chiusa geodeticamente completa con curvatura gaussiana costante negativa.