PRODOTTI SCALARI

Introduciamo lo strumento che ci porterà a definire angoli e lunghezze.

Esempio 1) Prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

Forse avete incontrato la seguente formula:

$$\langle v, w \rangle = |v|\,|w| \cos\alpha$$

prodotto scalare

lunghezza vettore

angolo

altro modo per introdurlo (più utile in questo momento)

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = v^t w = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Si può facilmente generalizzare e definiamo il <u>prodotto scalare standard</u> in $\mathbb{R}^n$:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = {}^t v\, y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum x_i y_i$$

2) <u>prodotto scalare standard in $\mathbb{C}^n$</u>

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n = \sum \bar{x}_i y_i$$

$\bar{x}_i$ coniugato di x_i

se definiamo $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$

possiamo scrivere

$$\langle v, w \rangle = {}^t\bar{v}\, w$$

Questi sono due esempi di prodotto scalare

come definire in generale il prodotto scalare?

<u>Def</u> V spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Un <u>prodotto scalare</u> è un'applicazione

$$\langle\,,\,\rangle : V \times V \longrightarrow K$$
$$(v, w) \longrightarrow \langle v, w\rangle$$

tale che

1) se $K = \mathbb{R}$

- $\langle\,,\,\rangle$ è <u>bilineare</u> i.e. per ogni $v, v', w, w' \in V$ $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$

$$\langle v, \lambda w + \lambda' w'\rangle = \lambda\langle v, w\rangle + \lambda'\langle v, w'\rangle$$

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle + \lambda'\langle v', w\rangle$$

- $\langle\,,\,\rangle$ è <u>simmetrico</u> i.e per ogni $v, w \in W$

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$$

- $\langle\,,\,\rangle$ è <u>definito positivo</u> i.e per ogni $v \in W$

$$\langle v, v\rangle \geq 0$$
e $\langle v, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

2) se $K=\mathbb{C}$

- $\langle\, ,\,\rangle$ è sesquilineare i.e. lineare nel secondo argomento e per il primo argomento per ogni $v, v', w \in V$ $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ vale che

$$\langle \lambda v + \lambda' v', w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle + \bar{\lambda}'\langle v', w\rangle$$

- $\langle\, ,\,\rangle$ è hermitiano i.e per ogni $v, w \in V$

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$$

$$\left(\Rightarrow \langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \Rightarrow \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}\right)$$

- $\langle\, ,\,\rangle$ è definita positiva i.e per ogni $v \in V$

$$\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Oss lineare nel secondo argomento + hermitiano $\Rightarrow$ sesquilineare

Definizione Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (resp. su $\mathbb{C}$) con un prodotto scalare si dice euclideo (resp. unitario)

Esempio: prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$

Esercizio $\langle\, , \rangle$ prodotto scalare $\forall v \in V$ $\langle 0, v \rangle = 0$

Come si possono rappresentare i prodotti scalari?

Def V spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

Sia $b : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineare e simmetrica (per $\mathbb{R}$) o una forma sesquilineare e hermitiana (per $\mathbb{C}$)

Definiamo:

$$M_{\mathcal{B}}(b) = (b(v_i, v_j))_{i,j}$$

matrice di b associata alla base $\mathcal{B}$

Oss $V, \mathcal{B}, b$ come sopra $K = \mathbb{C}$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$
$w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$$b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \overset{\text{sesquilinearità}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x}_i y_j \, b(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x}_i \, b(v_i, v_j) \, y_j$$

consideriamo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ $\leftarrow$ vettore colonna che esprime v rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ $\leftarrow$ vettore colonna che esprime w rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
{}^t\bar{x}\, M_{\mathcal{B}}(b)\, y &= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\, M_{\mathcal{B}}(b) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, b(v_i, v_1), \dots, \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, b(v_i, v_n) \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i\, b(v_i, v_j)\, y_j = b(v, w)
\end{aligned}$$

Concludendo $\boxed{b(v,w) = {}^t\bar{x}\, M_{\mathcal{B}}(b)\, y}$

Analogamente se $K = \mathbb{R}$

$$\boxed{b(v,w) = {}^t x\, M_{\mathcal{B}}(b)\, y}$$

Le matrici associate a forme bilineari simmetriche o sesquilineari hermitiane devono avere delle particolari proprietà.

Def una matrice A quadrata reale si dice <u>simmetrica</u> se ${}^tA = A$

Esempi $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ non è simmetrica

Def una matrice A quadrata complessa si dice <u>hermitiana</u> se ${}^t\overline{A} = A$ (dove se $A = (a_{ij})$ definisco $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$)

Esempi $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ è hermitiana $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ non è hermitiana

$\begin{pmatrix} 2 & 2+i & 7+2i \\ 2-i & 3 & 0 \\ 7-2i & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è hermitiana.

Oss • b forma bilineare simmetrica su V

$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ base di V

$$b(v_i, v_j) = b(v_j, v_i) \Longrightarrow M_{\mathcal{B}}(b) \text{ simmetrica}$$

• per le forme sesquilineari hermitiane le matrici associate sono hermitiane

---

Tutte le matrici simmetriche (risp. hermitiane) inducono forme bilineari simmetriche (risp. sesquilineari hermitiane)

Proposizione:

1) Sia A una matrice reale quadrata

A è simmetrica

$\Longleftrightarrow$

$$b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \longrightarrow {}^t x A y$$

è una forma bilineare simmetrica

2) Sia A una matrice complessa quadrata

A è hermitiana

$\Longleftrightarrow$

$$b: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(x, y) \longrightarrow {}^t \bar{x} A y$$

è una forma sesquilineare hermitiana

Dim 2) (1) può essere visto come caso particolare di 2)

"$\Longrightarrow$" supponiamo A hermitiana b è sesquilineare

2° argomento

$$= b(x, \lambda y + \lambda' y') = {}^t\overline{x}\, A\, (\lambda y + \lambda' y')$$

$$= {}^t\overline{x}\, A\, \lambda y + {}^t\overline{x}\, A\, \lambda' y'$$

distributività somma tra matrici rispetto prodotto

$$= \lambda ({}^t\overline{x}\, A\, y) + \lambda' ({}^t\overline{x}\, A\, y')$$

prop. prodotto per uno scalare e una matrice

$$= \lambda\, b(x, y) + \lambda'\, b(x, y')$$

1° argomento

$$= b(\lambda x + \lambda' x', y) = {}^t\overline{(\lambda x + \lambda' x')}\, A\, y$$

$$= (\overline{\lambda}\, {}^t\overline{x} + \overline{\lambda'}\, {}^t\overline{x'})\, A\, y = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{x} A y + \overline{\lambda'}\, \overline{x'} A y$$

proprietà coniugio in $\mathbb{C}$

distributività

$$= \overline{\lambda}\, b(x, y) + \overline{\lambda'}\, b(x', y)$$

b è hermitiana

$$= b(x,y) = {}^t\overline{x} A y = {}^t({}^t\overline{x} A y) = ({}^t y\, {}^t A\, \overline{x}) = \overline{({}^t\overline{y}\, {}^t\overline{A}\, x)} =$$

trasposto di un numero è il numero stesso

$${}^t(CD) = {}^tD\, {}^tC$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overset{\Delta}{=} \overline{({}^t\overline{y} A x)} = \overline{b(y, x)}$$

A hermitiana

$\blacktriangle$

"$\Leftarrow$"

vedi osservazione precedente

$\blacksquare$

OSS Se B, C sono matrici quadrate complesse tali che ${}^t\bar{x} B y = {}^t\bar{x} C y$ per ogni $x, y \in \mathbb{C}^n$ allora $B = C$ (vale analoga proprietà per matrici reali)

Dim (e_i) base standard

$${}^t\bar{e}_i B e_j = b_{ij}$$ da cui segue la tesi $\blacksquare$

Def Sia V spazio vettoriale su $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Un'applicazione

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow \|v\|$$

è una norma su V se:

i) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ disuguaglianza triangolare

iii) $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

Esempi di norme:

in $\mathbb{R}^n$ (per esempio $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$)

1) $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

(norma euclidea standard)

dimostreremo che è una norma in seguito

2) $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_i |x_i|$

valori assoluti

(questa viene detta norma 1)

Esercizio $\|\cdot\|_1$ è una norma

i) $\|\lambda(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_i |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_i |x_i|$

$= |\lambda| \, \|(x_1, \dots, x_n)\|_1$

ii) $\|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_1 = \|(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)\|_1$

$= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \leq \sum_i^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| =$

proprietà del valore assoluto

$= \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 + \|(y_1, \dots, y_n)\|_1$

iii) $\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0$$

$$\iff |x_i| = 0 \ \forall i \iff (x_1,\dots,x_n) = 0.$$

---

3) $\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max_{i=1\dots n} |x_i|$ valore assoluto

(questa viene detta norma ∞)

Esercizio: mostrare che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma

su $\mathbb{C}^n$

1) la norma standard in $\mathbb{C}^n$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

modulo del numero complesso

$$= \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n}$$

dimostreremo che è una norma in seguito

Usando il modulo al posto del valore assoluto possiamo definire $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ su $\mathbb{C}^n$

<u>Oss</u> $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$

<u>dim</u>

$$\|v - v\| = \|0\| = 0$$

$$0 = \|v - v\| \leq \|v\| + \|-v\| = \|v\| + |-1|\,\|v\|$$

$$= 2\|v\|$$

$$\Rightarrow \|v\| \geq 0 \qquad \blacksquare$$

<u>Esempio</u> • in $\mathbb{R}^n$ consideriamo la norma standard

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{<(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)>}$$

prodotto scalare standard

• in $\mathbb{C}^n$ consideriamo la norma standard

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n} = \sqrt{<(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)>}$$

prodotto scalare standard in $\mathbb{C}^n$

<u>Relazione fra prodotto scalare e norme</u>: a ogni prodotto scalare è associata una norma (ma non tutte le norme vengono da un prodotto scalare)

<u>Proposizione</u> Se $< , >$ è un prodotto scalare su V (reale o complesso)

$\|v\| = \sqrt{<v, v>}$ è una norma su V

Dim proposizione:

- i) e iii) sono immediate

come esercizio facciamo 1 nel caso complesso:

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}\lambda \langle v, v\rangle}$$

$$= \sqrt{|\lambda|^2 \langle v, v\rangle} = |\lambda| \langle v, v\rangle = |\lambda| \, \|v\|$$

- per la dis. Triangolare serve un risultato non banale:

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare su V

$$\Longrightarrow$$

per ogni $v, w \in V$ $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$

Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se v, w sono linearmente indipendenti

Dim. caso complesso (caso reale è un caso particolare):

Se $w = 0$ $\underbrace{|\langle v, 0\rangle|}_{\overset{\|}{0} \text{ (x Esercizio)}} \leq \underbrace{\|v\| \, \|0\|}_{\overset{\|}{0}}$

è banalmente verificato

Se $w \neq 0$ poniamo $\lambda = \dfrac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\underset{\neq 0}{\langle w,w\rangle}}$

$$0 \le \langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle = \langle v,v\rangle - \lambda\langle v,w\rangle - \bar{\lambda}\langle w,v\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle w,w\rangle$$

sesquilinearità

$$= \langle v,v\rangle - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle}\langle v,w\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\overline{\langle v,w\rangle} + \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\cancel{\langle w,w\rangle}}\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\cancel{\langle w,w\rangle}$$

sostituisco λ

$\langle w,w\rangle \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow$$

$$0 \le \|v\|^2 - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2} - \cancel{\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2}} + \cancel{\frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|w\|^2}}$$

moltiplico per $\|w\|^2 > 0$

$$0 \le \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v,w\rangle|^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$|\langle v,w\rangle|^2 \le \|v\|^2\|w\|^2$$

$$\Longrightarrow$$

$$|\langle v,w| \le \|v\|\,\|w\|$$

Inoltre:
vale l'uguaglianza $\Longleftrightarrow 0 = \langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle$
$\Longleftrightarrow v - \lambda w = 0 \Longleftrightarrow v, w$ linearmente dip.

∎

dimostrazione disuguaglianza triangolare:
(il punto che ci manca per dimostrare $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ norma)

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle \underset{\text{sesquilinearità}}{=} \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \|w\|^2$$

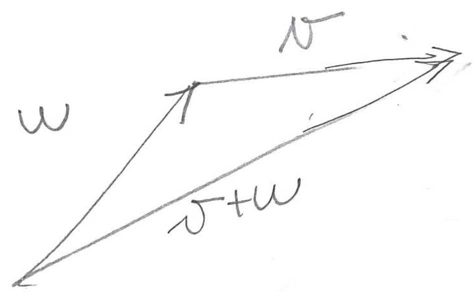
$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v,w\rangle|$$

$$\underset{\text{disuguaglianza di C.S.}}{\leq} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

$\blacksquare$

Oss perchè si chiama triangolare



$\|v+w\| < \|v\| + \|w\|$

cioè

"la somma di due lati del triangolo è più grande del terzo"

v, w linearmente indipendenti

ANGOLI

Sia V uno spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}$

sappiamo che

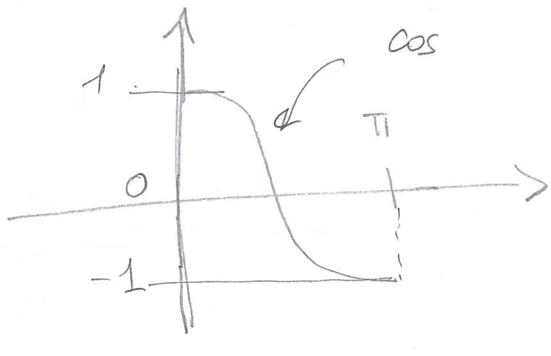
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \, \|w\| \quad \text{(Disuguaglianza C.S.)}$$

$$-\|v\|\,\|w\| \leq \langle v, w\rangle \leq \|v\|\,\|w\|$$

Se $v, w \neq 0$

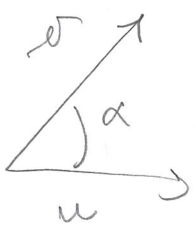
$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq +1$$

Oss: per ogni $k \in [-1, +1]$ esiste un unico $\alpha \in [0, \pi]$ tale che $\cos\alpha = k$



Def $v, w \in V$ $v, w \neq 0$

Definiamo l'angolo tra v, w l'unico $\alpha \in [0, \pi]$ tale che $\cos\alpha = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$



Oss: Ritroviamo la definizione di partenza $\langle v, w\rangle = \cos\alpha \, \|v\|\,\|w\|$.

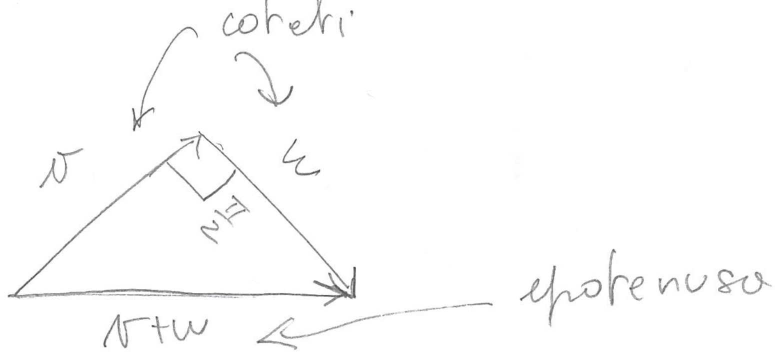
Def V spazio vettoriale euclideo o unitario
$v, w \in V$ si dicono **ortogonali** se e solo se

$\langle v, w \rangle = 0$ e si scrive $v \perp w$

(nel caso euclideo
$\langle v, w \rangle = 0 \iff$ angolo tra v e $w = \frac{\pi}{2}$)

Esempi in $\mathbb{R}^2$

1)



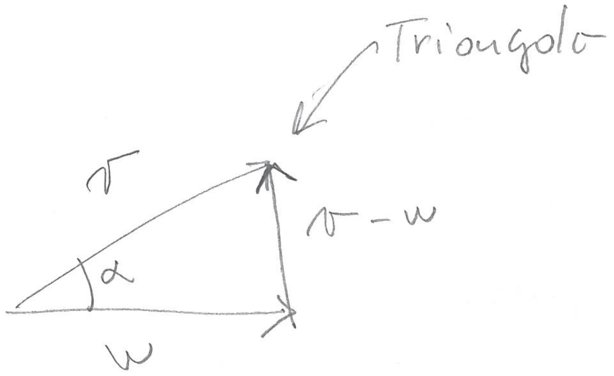
$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle$$

bilinearità

$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \underbrace{2\langle v, w \rangle}_{= 0} = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Ritroviamo il teorema di Pitagora

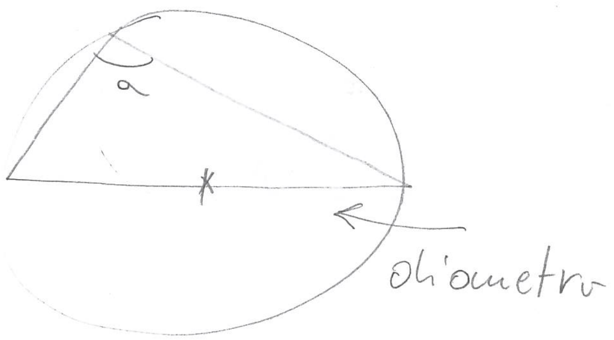
2)



$$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle =$$
$$= \langle v, v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$
$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle$$
$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\cos\alpha \, \|v\| \, \|w\|$$

Ritroviamo il teorema del coseno

Ci sono altri teoremi classici che si possono dimostrare in questo contesto!

- 

$\Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

- I due teoremi di Euclide per i triangoli rettangoli

- le tre altezze di un triangolo si incontrano in un punto

Def V spazio vettoriale euclideo o unitario

1) $U, W \subset V$ sotto-spazi

U, W sono ortogonali $(U \perp W)$ se per ogni $u \in U$ e per ogni $w \in W$

$<u, w> = 0$

2) $W \subseteq V$ sottospazio

$W^\perp = \{ v \in V \mid <v, w> = 0 \ \forall w \in W \}$

si dice il complemento ortogonale di W

Oss $W^\perp$ è un sottospazio di V

Dim i) $<0, w> = 0 \ \forall w \in W \Rightarrow 0 \in V$

ii) $v_1, v_2 \in W^\perp \quad \forall w \in W$

$<\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w> = \lambda_1 \underbrace{<v_1, w>}_{0} + \lambda_2 \underbrace{<v_2, w>}_{0} = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W^\perp$

3) una famiglia di vettori di V $(v_i)_{i \in I}$ si dice ortogonale se per ogni $i, j \in I$ $i \neq j$ $v_i \perp v_j$

4) una famiglia di vettori di V $(v_i)_{i \in I}$ si dice ortonormale se è ortogonale e per ogni $i \in I$ $\|v_i\| = 1$ ($\|\cdot\|$ norma associata a $\langle , \rangle$)

5) una base ortonormale di V è una base che è ortonormale

Esempi 1) in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ la base canonica è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ← delta di Kronecker

2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ (e $\mathbb{C}^2$) con prodotto scalare standard

3) (v_i) base ortonormale $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

Osservazione $v_1, \dots, v_n$ base ortonormale di V

allora per ogni $v \in V$ $v = \langle v_1, v \rangle v_1 + \dots + \langle v_n, v \rangle v_n$

Dim Sia $v \in V$

(v_i) base $\Rightarrow$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$$\langle v_j, v \rangle = \langle v_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \rangle =$$

bilineare o sesquilineare

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\delta_{ij}} = \lambda_j$$

da cui $v = \langle v_1, v \rangle v_1 + \dots + \langle v_n, v \rangle v_n$ $\boxtimes$

Osservazione $(v_i)_{i \in I}$ famiglia ortogonale e $v_i \neq 0 \ \forall i$ allora

i) $(v_i)_{i \in I}$ sono linearmente indipendenti

ii) $\frac{v_i}{\|v_i\|}$ famiglia ortonormale

Dim i) $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$

$$\langle v_j, \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \rangle = \langle v_j, 0 \rangle = 0$$

da cui

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_j = 0$$

$\langle v_j, v_i \rangle = 0$
tranne che nel caso
$i = j$

$\Rightarrow \forall_{j \in I} \ \lambda_j = 0$

ii) $$\left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|v_i\|} \right| \|v_i\| = \frac{1}{\|v_i\|} \|v_i\| = 1$$

proprietà
norma

se $i \neq j$

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|} \frac{1}{\|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

Domanda: Esiste sempre una base ortonormale?

Sì

TEOREMA (Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)

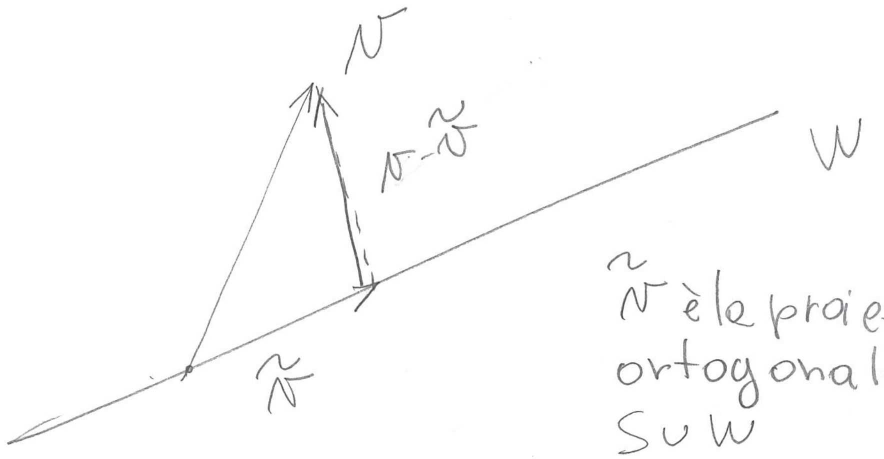
Sia V spazio euclideo o unitario
$W \subseteq V$ sottospazio
Allora ogni base ortonormale $w_1, \dots, w_n$ di W
si prolunga ad una base ortonormale
$w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_m$ di V

Dim: per induzione su $m-n$

$\boxed{m-n=0} \Longrightarrow \dim W = \dim V$
$\Longrightarrow W = V$ tesi banalmente verificata

$\boxed{\text{passo induttivo}}$
$m-n>0 \Longrightarrow \exists\, v \in V ; v \notin W$

Consideriamo $\tilde{v} = \langle w_1, v \rangle w_1 + \dots + \langle w_n, v \rangle w_n \in W$



$\tilde{v}$ è la proiezione ortogonale di v su W

infatti

$\boxed{v - \tilde{v} \text{ è ortogonale a } w_j}$ per ogni $j = 1, \dots, n$

$$\langle w_j, v - \tilde{v} \rangle = \langle w_j, v - \sum_{i=1}^{n} \langle w_i, v \rangle w_i \rangle$$

$$= \langle w_j, v \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle w_i, v \rangle \underbrace{\langle w_j, w_i \rangle}_{\delta_{ij}}$$

bilinearità o sesquilinearità

$$= \langle w_j, v \rangle - \langle w_j, v \rangle = 0$$

$$\langle w_j, v - \tilde{v} \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Ricordo $v \notin W$, $\tilde{v} \in W$ $\Rightarrow v - \tilde{v} \notin W \Rightarrow v - \tilde{v} \neq 0$

posso definire $w_{n+1} = \dfrac{v - \tilde{v}}{\| v - \tilde{v} \|}$

Ottengo

$w_{n+1} \perp w_j$ per ogni $j = 1 \dots n$ e $\| w_{n+1} \| = 1$

Definisco

$W_1 = \langle w_1, \dots, w_{n+1} \rangle$ Sottospazio generato da $w_1, \dots, w_{n+1}$

$w_1, \dots, w_{n+1}$ base ortonormale di W_1

$W_1 \subseteq V$

$\dim V - \dim W_1 = n - 1$

Uso ipotesi induttiva e prolungo

$w_1, \dots, w_{n+1}$ ad una base di W.

(Idea: se parto da un sottospazio proprio aggiungo un vettore ortonormale alla volta fino a generare V) $\boxtimes$

Corollario Ogni sp. vett. euclideo o unitario ha una base ortonormale

Dim Se $V = \{0\}$ la base è data da $\emptyset$

Se $V \neq \{0\}$ esiste $v \in V$, $v \neq 0$

Sia $w_1 = \frac{v}{\|v\|}$ e $W_1 = \langle w_1 \rangle$ sottospazio generato da w_1

Usando il corollario completo w_1 $\boxtimes$

Oss V spazio vett. euclideo o unitario con prodotto scalare $\langle , \rangle$
Se calcolo $\langle , \rangle$ rispetto ad una base ortonormale ottengo il prodotto scalare standard

Dim | caso unitario (analogo caso euclideo) |

$v_1, \dots, v_n$ base ortonormale di V rispetto a $\langle , \rangle$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$$\langle v, w \rangle = \langle \sum_i x_i v_i , \sum_j y_j v_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \overline{x_i}\, y_j \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = \sum_i \overline{x_i}\, y_i$$

$$= {}^t\overline{x}\, y$$

dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}$ $\blacksquare$

Def $V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_k$

è una <u>somma ortogonale</u> di V_i sottospazi di V se:

i) $V = V_1 + \dots + V_k$

ii) $V_i \perp V_j$ se $i \neq j$

Oss Una somma ortogonale è una somma diretta perchè $V_i \perp \sum_{j \neq i} V_j$ e quindi $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$

Proposizione V spazio euclideo o unitario

$W \subseteq V$ sottospazio e $\dim V = n < \infty$

allora $V = W \oplus W^{\perp}$

In particolare $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$

Dim Sia $w_1, \dots, w_m$ base ortonormale

di W, prolungo a $w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n$

base di V

Per ogni $v \in V$

$$v = \underbrace{\langle w_1, v\rangle w_1 + \dots + \langle w_m, v\rangle w_m}_{\in W} + \underbrace{\langle w_{m+1}, v\rangle w_{m+1} + \dots + \langle w_n, v\rangle w_n}_{\in W^{\perp}}$$

$\Rightarrow V = W + W^{\perp}$

$W \perp W^{\perp} \Rightarrow V = W \oplus W^{\perp}$ $\square$

Commento $w_{m+1}, \dots, w_n$ base di $W^{\perp}$

ENDOMORFISMI ORTOGONALI e UNITARI

Def V spazio euclideo (risp. unitario)
Un endomorfismo $f: V \to V$ si dice ortogonale (risp unitario) se:

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle \quad \text{per ogni } v, w \in V,$$

Oss se f ortogonale o unitario otteniamo che

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\langle f(v), f(v) \rangle} = \|f(v)\|$$

(cioè f preserva anche la norma indotta da $\langle , \rangle$)

Domanda: vale anche il viceversa? Si

Proposizione V spazio euclideo (risp unitario)
$f: V \to V$ endom. tale che $\|f(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.
Allora f ortogonale (risp unitario)

Dim: $\boxed{\text{caso euclideo } (K = \mathbb{R})}$

$$\langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle$$

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle$$

$$\boxed{\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)}$$

FORMULA di POLARIZZAZIONE

Questa formula implica che se f preserva la norma indotta allora f preserva anche il prodotto scalare

Caso unitario $K = \mathbb{C}$

FORMULA DI POLARIZZAZIONE (caso complesso):

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v-iw\|^2 - i\|v+iw\|^2\right)$$

usando F.di P. si ottiene la tesi nel caso complesso

$\boxtimes$

Nelle prossime osservazioni supponiamo $f: V \to V$ ortogonale e unitario

Oss f è iniettiva e se $\dim V$ è finita allora f è un automorfismo

Dim Sia v tale che $f(v) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f(v)\| = 0 \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$ $\boxtimes$

Oss λ autovalore di $f \Rightarrow |\lambda| = 1$

Dim $\exists v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1 \quad (v \neq 0 \Rightarrow \|v\| \neq 0)$$ $\boxtimes$

caso ortogonale $\Rightarrow \lambda = \pm 1$

caso unitario $\Rightarrow |\lambda| = 1$

$\lambda = e^{i\alpha}$ con $0 \leq \alpha < 2\pi$

<u>Oss</u> v autovettore di f relativo a λ
w autovettore di f relativo a μ

se $\lambda \neq \mu$ allora $v \perp w$

<u>Dim</u> $f(v) = \lambda v$
$f(w) = \mu w$

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle$$

$$= \bar{\lambda} \mu \langle v, w \rangle$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \bar{\lambda}\mu) \langle v, w \rangle = 0$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v \perp w$$

oppure

$$(1 - \bar{\lambda}\mu) = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}\mu = 1 \Rightarrow \lambda^{-1}\mu = 1 \Rightarrow \lambda = \mu$$

IMPOSSIBILE

$$\boxed{\text{dato che } |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda^{-1}}$$

caso reale è un caso particolare di quello complesso ∎

<u>Oss</u> Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono autovalori distinti di f allora

$$\underbrace{Aut(\lambda_1) \oplus^{\perp} Aut(\lambda_2) \oplus^{\perp} \dots \oplus^{\perp} Aut(\lambda_k)}_{\text{somma ortogonale}} \subseteq V$$

DOMANDA:
Che conseguenze ha il fatto che f sia unitorio / ortogonale sulla matrice associata ad f?

Def. Una matrice invertibile reale A si dice ortogonale se $A^{-1} = {}^tA$

. Una matrice invertibile complessa A si dice unitaria se $A^{-1} = {}^t\overline{A}$

Proposizione A è una matrice $n \times n$
Sono equivalenti:
i) A è ortogonale o unitaria
ii) i vettori colonna di A sono una base ortonormale di K^n con prodotto scal. stand.
iii) i vettori riga di A sono una base ortonormale di K^n con prodotto scal. standard

Dim A è unitaria $\Longleftrightarrow A^{-1} = {}^t\overline{A} \Longleftrightarrow {}^t\overline{A}A = E_n$

$\Longleftrightarrow$ se a^i è l'iesimo vettore colonna di A

$$\underbrace{{}^t\overline{a^i} \cdot a^j}_{\text{prodotto fra matrici}} = \delta_{ij}$$

$\Longleftrightarrow$ a^i sono una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare standard

Per le righe si sfrutta analogamente lo stesso tipo di proprietà:

$$A\,{}^t\overline{A} = E_n \iff A\,{}^t\overline{A} = E_n \iff \overline{{}^tA}\,\overline{\overline{A}} = \overline{E_n} \iff A$$

$$\iff \overline{A}\,{}^tA = E_n$$

$\iff$ i vettori riga sono una base ortonormale di K^n ▨

Esempi 1) matrici che rappresentano rotazioni in $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & +\cos\alpha \end{pmatrix}$$ le righe (o le colonne) formano una base ortonormale

$\Rightarrow$ A è ortogonale

2) matrici che rappresentano riflessioni in $\mathbb{R}^2$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$ le righe (o le colonne) formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ B è ortogonale ▨

Prop $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo
V sp. vett euclideo (risp. unitario)
$\mathcal{B}$ base ortonormale
f è ortogonale (risp. unitario) $\iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale (risp. unitaria)

Dim: (caso unitario) $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

definiamo: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordinate rispetto a base $\mathcal{B}$

$A = M_{\mathcal{B}}(f)$

- ricordo che siccome $\mathcal{B}$ base ortonormale

$\langle v, w \rangle = {}^t\overline{x}\, y \leftarrow$ prodotto scalare standard dei vettori coordinate

- ricordo che coordinate di

$f(v)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ $\quad Ax$

$f(w)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ $\quad Ay$

f unitario $\iff \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle \ \forall v, w$

$\iff {}^t\overline{x}\, y = {}^t\overline{(Ax)}\, Ay \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

$\iff {}^t\overline{x}\, E_n y = {}^t\overline{x}\, {}^t\overline{A} A y$

$\iff E_n = {}^t\overline{A} A \ ; \ {}^t\overline{A} = A^{-1}$

proposizione

se $\forall x, y \in K^n \ {}^t\overline{x} A y = {}^t\overline{x} B y \Rightarrow A = B$

Corollario (caso particolare)

A matrice $n \times n$ reale complessa

$$A \text{ è ortogonale (risp. unitaria)}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$L(A) : K^n \to K^n \text{ è ortogonale (risp. unitaria)}$$

dove K^n spazio euclideo (risp unitario) con prodotto scalare standard

Dim: $\mathcal{B}$ base canonica è una base ortonormale e

$$M_{\mathcal{B}}(L(A)) = A$$

$\boxtimes$

Oss. rotazioni e riflessioni sono applicazioni ortogonali di $\mathbb{R}^2$.

Oss

- A, B matrici unitarie

$$^t\overline{A \cdot B}\, AB = {}^t\overline{B}\, \underbrace{{}^t\overline{A}\, A}_{\substack{E_n \\ \text{perchè} \\ A \text{ unitaria}}} B = {}^t\overline{B}\, B = E_n$$

$\Rightarrow AB$ matrice unitaria

- E_n matrice unitaria

- A matrice unitaria

$$A^{-1} \cdot {}^t\overline{A^{-1}} = A^{-1} \cdot {}^t\overline{({}^t\overline{A})} = A^{-1} A = E_n$$

$\implies A^{-1}$ matrice unitaria

Conseguenze:

$U(n) = \{A \text{ matrice } n \times n \mid A \text{ unitaria}\}$

è un gruppo con il prodotto di matrici

detto il gruppo unitario di grado n

(il prodotto fra matrici è associativo)

Analogamente:

$O(n) = \{A \text{ matrice } n \times n \mid A \text{ ortogonale}\}$

è un gruppo con il prodotto di matrici

detto il gruppo ortogonale di grado n

($O(n)$ può essere visto come sottogruppo di $U(n)$)

Oss: A matrice ortogonale / unitaria

$$\implies |\det A| = 1$$

Dim $\det(A\,{}^t\bar{A}) = 1$

$\implies \det(A) \cdot \det({}^t\bar{A}) = 1$

$\implies \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = 1$

$\implies |\det A|^2 = 1 \implies |\det A| = 1$ ∎

Si possono definire

$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det A = 1 \}$

gruppo speciale ortogonale

$SU(n) = \{ A \in SO(n) \mid \det A = 1 \}$

gruppo speciale unitario.

TEOREMA (Forma normale per automorfismi unitari)

Sia V spazio unitario di dimensione finita e $f: V \to V$ un automorfismo unitario, allora esiste una base ortonormale di V che consiste di autovettori di f.

In particolare f è diagonalizzabile

Dim induzione su $n = \dim V$

$\boxed{n=0}$ $V = \{0\}$ banalmente verificato

$\boxed{n=1}$ $V \neq \{0\} \Rightarrow$ esiste $v \in V$ $v \neq 0$

$\frac{v}{\|v\|}$ è una base ortonormale di V

costituita da autovettori

Passo induttivo: "$n-1 \Rightarrow n$"

Siamo su $\mathbb{C}$ e per il teorema fondamentale dell'algebra

$P_f(\lambda)$ ha almeno una radice $\lambda \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ λ è un autovalore di f

$\Rightarrow \exists v_1 \neq 0$ tale che $f(v_1) = \lambda v_1$ (v_1 autovettore)

posso supporre $\|v_1\| = 1$

(altrimenti prendo $\frac{v_1}{\|v_1\|}$)

Considero $W = \langle v_1 \rangle^\perp$

obiettivo: $f(W) \subseteq W$

Sia $v \in W \Rightarrow \langle v, v_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle f(v), f(v_1) \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle f(v), \lambda v_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow \bar{\lambda} \langle f(v), v_1 \rangle = 0$

$|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \neq 0$ $\Rightarrow \langle f(v), v_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow f(v) \perp v_1$

$\Rightarrow f(v) \in W = \langle v_1 \rangle^\perp$

fine dimostrazione obiettivo

posso considerare

$$f|_W : W \longrightarrow W$$ endomorfismo unitario

inoltre $V = \langle v_1 \rangle \oplus W$

$\Rightarrow \dim W = n-1$

$\Rightarrow$ esiste $v_2, \dots, v_n$ base ortonormale di W
per ip. induttivo costituita da autovettori di $f|_W$ (che sono anche autovettori di f)

- Siccome $v_i \in W = \langle v_1 \rangle^\perp$ abbiamo che
$\langle v_1, v_i \rangle = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$
- Inoltre per ogni $v \in V$ esistono $\lambda_1 v_1 \in \langle v_1 \rangle$ e $w \in W$ tali che
$v = \lambda_1 v_1 + w = \lambda_1 v_1 + \underbrace{\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}_{= w}$

In conclusione otteniamo

$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ base ortonormale di V
costituita da autovettori di f. $\boxtimes$

TEOREMA (forma normale per matrici unitarie)

A matrice unitaria, allora esiste una matrice unitaria S tale che

$$S^{-1} A S = {}^t\bar{S} A S \quad \text{è diagonale}$$

In particolare A è diagonalizzabile

Dim A matrice unitaria

$\Rightarrow L(A): \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

è un automorfismo unitario rispetto prodotto sc. stand.

$\Rightarrow$ esiste una base ortonormale

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di autovettori di $L(A)$

Otteniamo:

$$\underbrace{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{C}^n})}_{= S^{-1}} \; \underbrace{M_{\mathcal{E}}(L(A))}_{= A} \; \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{C}^n})}_{= S} = \underbrace{M_{\mathcal{B}}(L(A))}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

matrice cambiamento di base

autovettori di $L(A)$

Inoltre le colonne di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{C}^n}) = S$

sono i vettori della base $\mathcal{B}$, base ortonormale

$\Rightarrow S$ è unitaria

Corollario Se f è un automorfismo unitario e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di f

allora $V = Aut(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus Aut(\lambda_k)$