

Fondazioni superficiali – Interazione struttura – fondazione- terreno

rev. 26.11.2013

Parte dei testi e delle figure che seguono sono stati estratti, con alcune modifiche, da uno o più dei seguenti testi, a cui si rimanda per chiarimenti e approfondimenti:

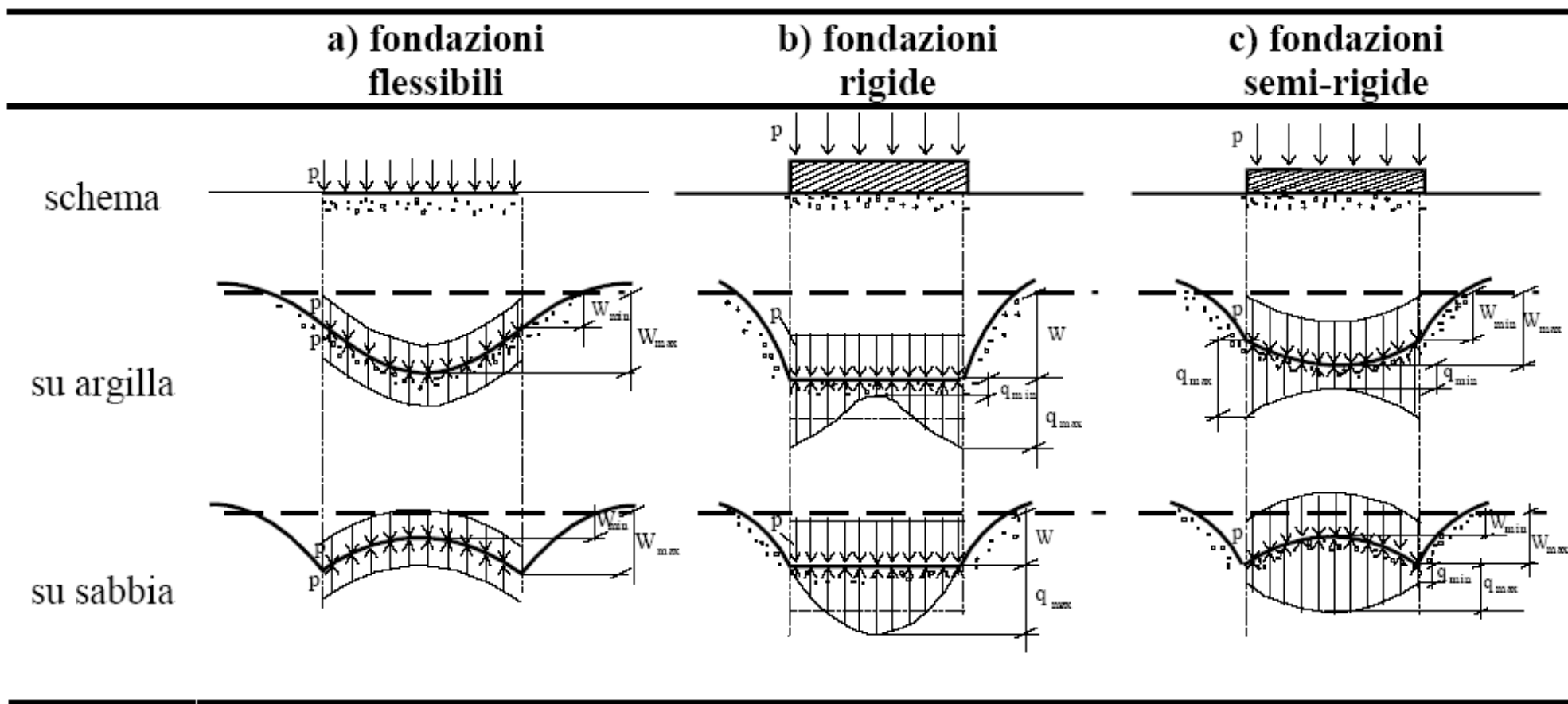
- Bowles J. E., FONDAZIONI PROGETTO E ANALISI, McGraw-Hill, Milano, 1991
- Colombo P., Colleselli F., ELEMENTI DI GEOTECNICA, Zanichelli, Bologna, 2004
- Facciorusso J., Madiati C., Vannucchi G. – DISPENSE DI GEOTECNICA, Dipartimento di Ingegneria Civile – Sezione Geotecnica, Università degli Studi di Firenze, 2006
- Lancellotta R., Costanzo D., Foti S., PROGETTAZIONE GEOTECNICA SECONDO L'EUROCODICE 7 (UNI EN 1997) E LE NORME TECNICHE PER LE COSTRUZIONI (NTC 2008), Hoepli Ed., Milano, 2011
- Lancellotta R., Calavera J., FONDAZIONI, McGraw-Hill, Milano, 2003

Pressioni di contatto

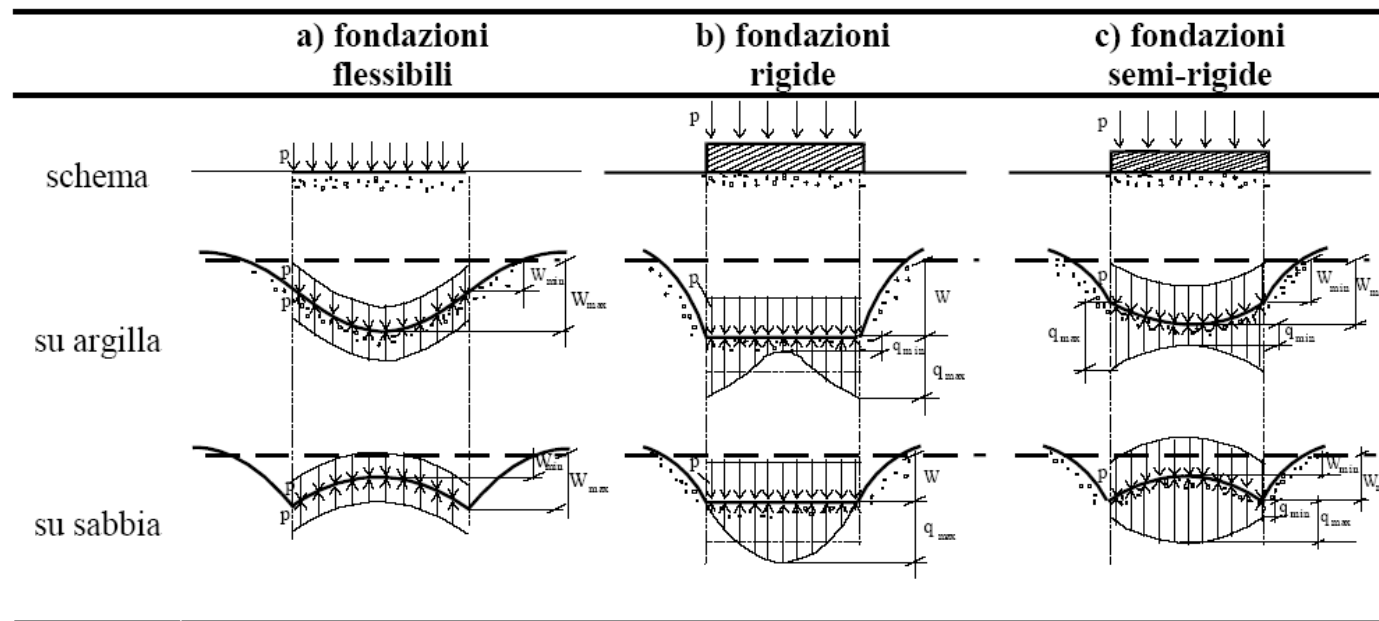
Una fondazione superficiale trasmette al terreno il carico proveniente dalla struttura in elevazione.

Le pressioni mutue all'intradosso della fondazione sono dette pressioni di contatto. La distribuzione delle pressioni di contatto dipende dall'entità e distribuzione del carico all'estradosso della fondazione, dalla rigidezza della struttura di fondazione e dalla rigidezza del terreno di fondazione.

In figura sono qualitativamente rappresentati gli effetti della rigidità della struttura di fondazione e della rigidità del terreno di appoggio sulla distribuzione della pressione di contatto per fondazioni **soggette ad un carico uniforme**.



Pressioni di contatto e cedimenti per fondazioni superficiali su terreno omogeneo soggette a carico verticale uniforme

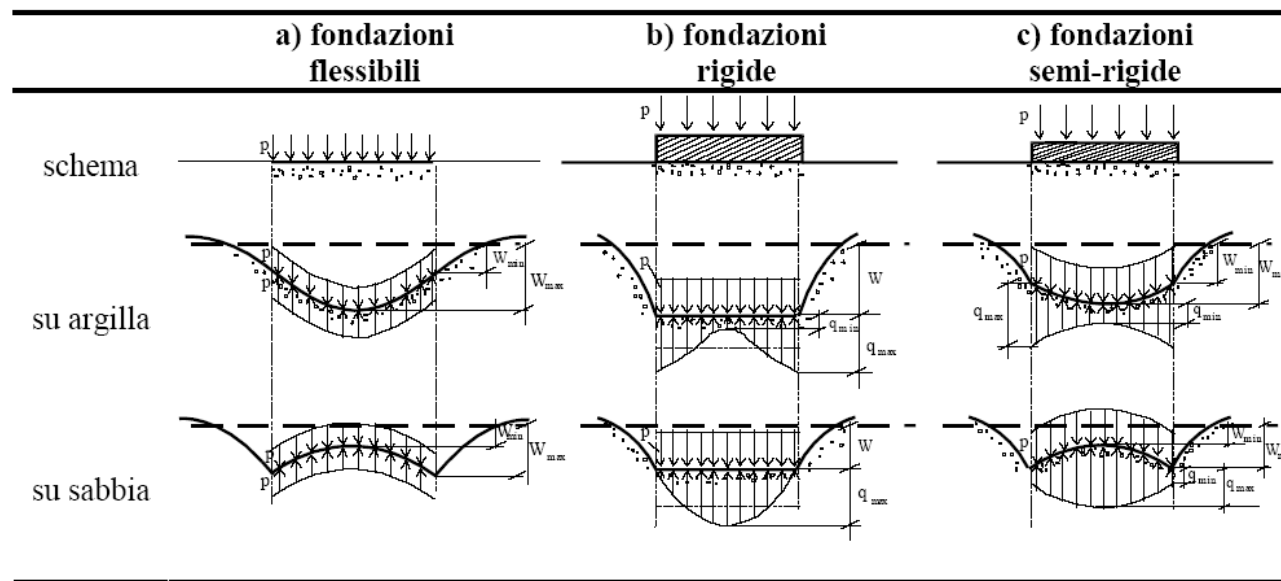


Pressioni di contatto e cedimenti per fondazioni superficiali su terreno omogeneo soggette a carico verticale uniforme

Se la fondazione è **priva di rigidità (caso a)**, ovvero non resistente a flessione, la distribuzione delle pressioni di contatto è necessariamente eguale alla distribuzione del carico applicato, e la sua deformata si adatta ai cedimenti del terreno.

Se il terreno di appoggio ha eguale rigidità sotto ogni punto della fondazione (**argilla**), il cedimento è massimo in mezzeria e minimo al bordo, ovvero la deformata ha concavità verso l'alto.

Se invece il terreno di appoggio ha rigidità crescente con la pressione di confinamento (**sabbia**), il cedimento è minimo in mezzeria e massimo al bordo, ovvero la deformata ha concavità verso il basso. Lo schema di fondazione priva di rigidità si applica, ad esempio, alle fondazioni dei rilevati.



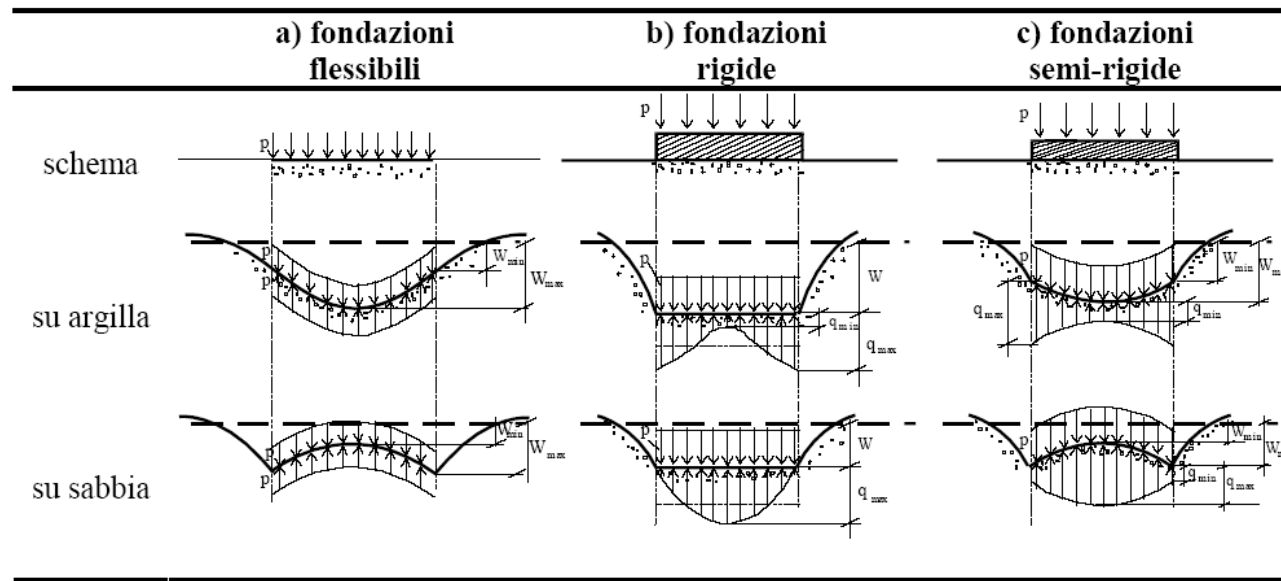
Pressioni di contatto e cedimenti per fondazioni superficiali su terreno omogeneo soggette a carico verticale uniforme

Se la fondazione ha **rigidezza infinita (caso b)**, ovvero è indeformabile e di infinita resistenza a flessione, per effetto di un carico a risultante verticale centrata, subisce una traslazione verticale rigida (cedimenti uniformi). La distribuzione delle pressioni di contatto è simmetrica per equilibrio e dipende dalla rigidezza del terreno di appoggio.

Se il terreno di appoggio ha eguale rigidezza sotto ogni punto della fondazione (**argilla**), le pressioni di contatto sono massime al bordo e minime in mezzeria.

Viceversa se terreno di appoggio ha rigidezza crescente con la pressione di confinamento (**sabbia**), le pressioni di contatto sono massime al centro e minime al bordo.

Lo schema di fondazione infinitamente rigida si applica, ad esempio, a plinti in calcestruzzo, alti e poco armati.



Pressioni di contatto e cedimenti per fondazioni superficiali su terreno omogeneo soggette a carico verticale uniforme

Se la fondazione ha **rigidezza finita (caso c)**, il suo comportamento è intermedio fra i due sopradescritti, ovvero ha una deformata curvilinea ma meno pronunciata di quella della fondazione priva di rigidezza, con concavità verso l'alto o verso il basso a seconda del tipo di terreno di appoggio.

Lo schema di fondazione di rigidezza finita si applica, ad esempio, alle platee di fondazione.

Se il carico proveniente dalla struttura in elevazione (e applicato all'estradosso della struttura di fondazione) non è uniforme ma ha comunque risultante verticale centrata, la distribuzione delle pressioni di contatto è:

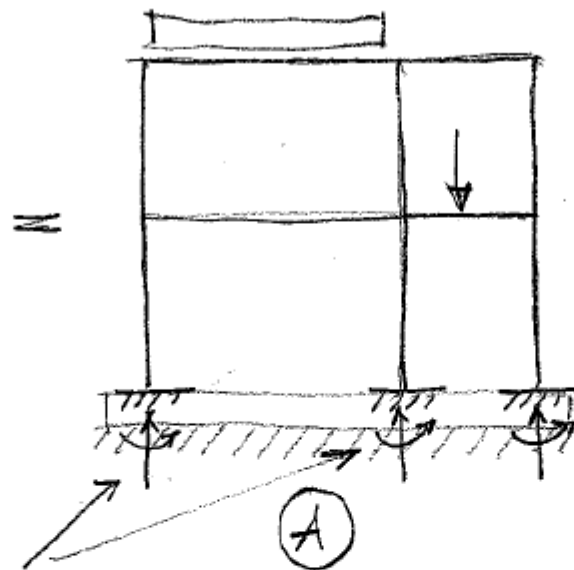
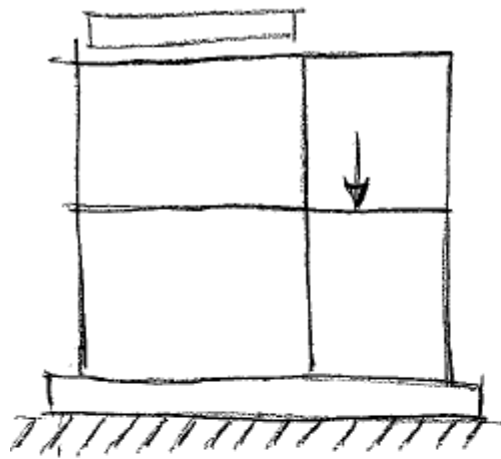
- per fondazioni flessibili, eguale alla distribuzione del carico applicato,
- per fondazioni di rigidezza infinita, eguale alla distribuzione per carico uniforme di pari risultante,
- per fondazioni di rigidezza finita, intermedia ai due casi precedenti¹.

Interazione struttura-terreno

Un'analisi rigorosa delle strutture di fondazione richiede lo studio dell'interazione tra la fondazione, la struttura in elevazione e il terreno.

Le incognite del problema non sono costituite unicamente dalle reazioni che il terreno trasmette alle fondazioni (ovvero che le fondazioni esercitano sul terreno), ma **anche** dalle mutue azioni che si scambiano la struttura in elevazione e le fondazioni.

Non sono in generale accettabili, se non in casi particolari, le usuali schematizzazioni che risolvono il problema disaccoppiando la risposta della struttura da quella della fondazione interagente con il terreno, risolvendo ad esempio dapprima la struttura come vincolata ad appoggi non cedevoli e, successivamente, analizzando lo stato di sforzo della fondazione soggetta ai carichi rappresentati dalle reazioni dei piedritti, determinate secondo lo schema precedente.

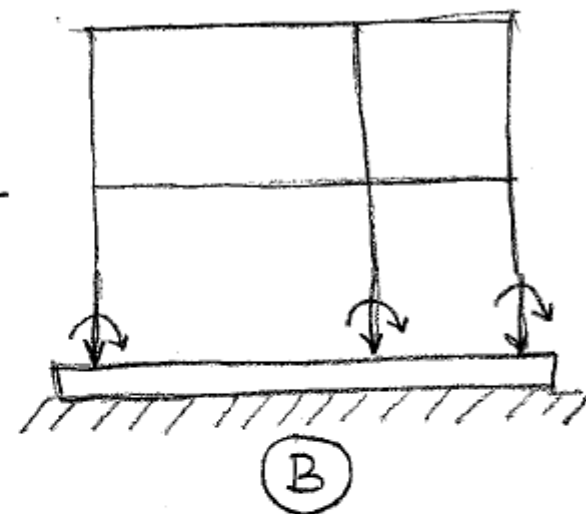


VINCOLI
"PROVVISORI"
RIMossi

- LE SEZIONI AL PIEDE DEI PILASTRI SONO INCASTRATE
- FONDAZIONI E TERRENO NON SONO SOLLECITATI

NOTA BENE!

↓
+



- I VINCOLI "PROVVISORI" VENGONO RIMossi
- LA RIMOZIONE CORRISPONDE AD IMPORRE FORZE E MOMENTI PIU' ALTE PEEZ. IN (A), CAMBIATI DI VERSO
- LA STRUTTURA IN ELEVAZIONE INTERVIENE "SOLO" CON LA SUA RIGIDezza

Per chiarire il problema è opportuno immaginare di separare l'analisi del sistema struttura-fondazione-terreno in due sotto-analisi A e B , la cui somma corrisponde alla situazione reale

L'analisi (A) corrisponde considera la struttura in elevazione rigidamente vincolata allo spiccatto fondazioni. E' evidentemente solo una parte della "risposta" del sistema.

Per completare il quadro è necessario integrare i risultati della analisi (A) con quelli della analisi (B).

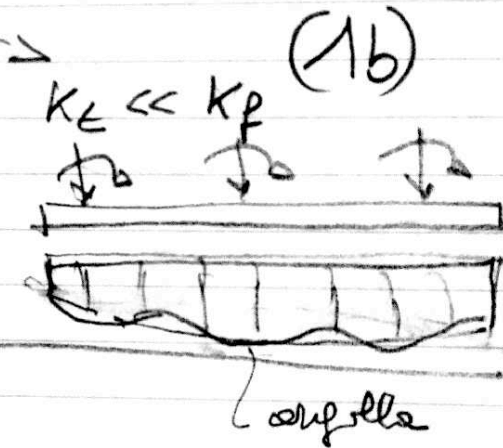
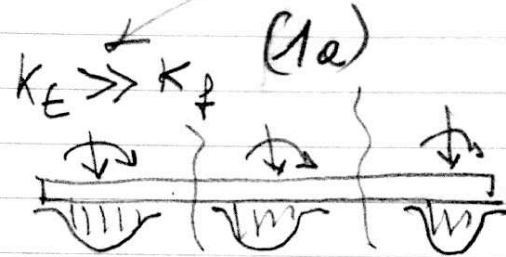
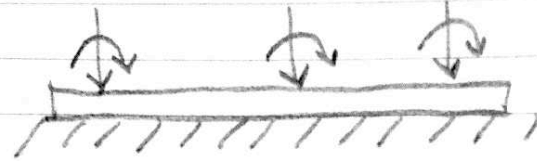
L'analisi (B) corrisponde alla rimozione dei vincoli "provvisori" inseriti per eseguire l'analisi (A) ovvero significa sollecitare l'insieme struttura in elevazione-fondazione-terreno UNICAMENTE con forze e momenti di uguale valore e di segno opposto alle reazioni vincolari ottenute in (A).

Osservazioni:

- 1) i carichi agenti sulla struttura in elevazione (compresi i pesi propri strutturali) agiscono SOLO nella fase A
- 2) nella fase A le strutture di fondazione e il terreno sono inerti (il peso proprio delle strutture di fondazione viene considerato nella fase B)
- 3) strutture di fondazione e terreno sono sollecitate solo nella fase B, dalle reazioni vincolari della fase A cambiate di segno e dal loro peso proprio
- 4) nella fase B la struttura in elevazione (senza carichi e senza peso) contribuisce solo come vincolo relativo più o meno rigido allo spostamento relativo tra le sezioni al piede dei pilastri e subisce le sollecitazioni conseguenti agli spostamenti relativi tra queste sezioni
- 5) nella fase B vengono sollecitate la struttura in elevazione (se è iperstatica), le fondazioni e il terreno

$K_E -$

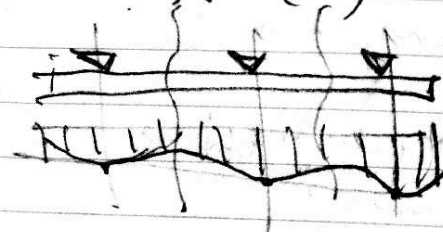
① $K_S \ll K_f$



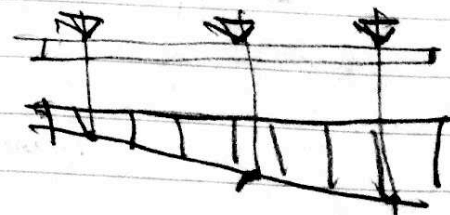
② $K_S \gg K_f$



$K_E \gg K_f$ (2a)



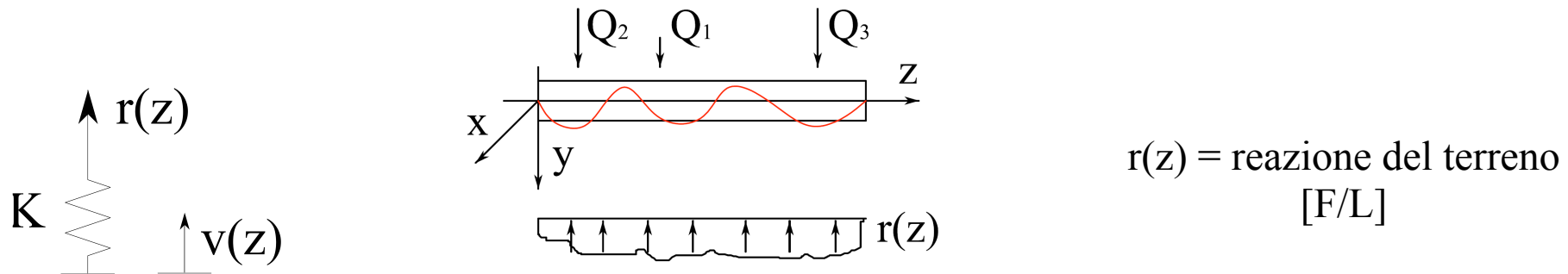
$K_E \ll K_f$ (2b)



LA TRAVE SU SUOLO ELASTICO

Terreno alla Winkler

Il terreno viene in genere rappresentato attraverso vincoli elastici (letto di molle - ipotesi di Winkler) posti ad interasse scelto in relazione alla luce delle travi di fondazione.



Terreno alla Winkler: mezzo elastico lineare la cui superficie di separazione in ogni punto reagisce con una forza proporzionale al cedimento

$$r(z) = K \cdot v(z)$$

1^a ipotesi di Winkler

dove:

$r(z)$ è la reazione distribuita del terreno immediatamente sottostante alla fondazione;

K è la rigidezza della molla elastica, dipendente dalle caratteristiche del terreno e della fondazione; se il terreno è omogeneo, la rigidezza K rimane costante lungo tutta la trave;

$v(z)$ è il cedimento del terreno sotto la trave ;

Dal punto di vista dimensionale si ha:

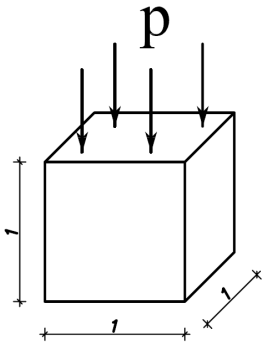
$$\left[\frac{F}{L} \right] = \left[\frac{F}{L^2} \right] \times [L]$$

La rigidezza K della molla vale:

$$K = k_w \cdot b$$

$$\left[\frac{F}{L^2} \right] = \left[\frac{F}{L^3} \right] \times [L]$$

dove:



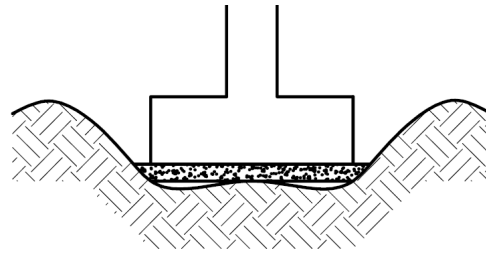
k_w si chiama COEFFICIENTE DI SOTTOFONDO o COSTANTE di WINKLER: è la pressione che bisogna esercitare su una superficie unitaria di terreno per determinare un cedimento unitario;

b è la larghezza della fondazione: aumentare “ b ” significa aumentare la resistenza che la trave oppone al terreno.

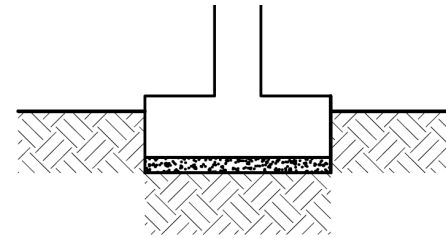
Ipotesi di Winkler:

1) LETTO DI MOLLE: solamente le molle sollecitate si abbassano, mentre quelle non sollecitate non “lavorano” (vedi figura): le molle sono indipendenti una rispetto all'altra.

Per piccole fondazioni è un'ipotesi cautelativa, in quanto si trascura il contributo delle zone non direttamente caricate.



situazione reale



modello alla Winkler

Ipotesi di Winkler:

2) ELASTICITÀ LINEARE

L'ipotesi può essere ragionevole nel caso di sollecitazioni di breve durata, rapide.

Per sollecitazioni di lunga durata non si può prescindere dal comportamento viscoso del terreno.

Ipotesi di Winkler:

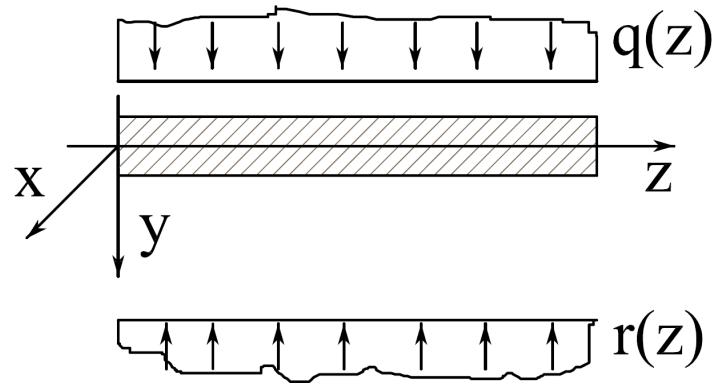
3) VINCOLO BIDIREZIONALE

Si considera che la molla elastica reagisce sia a compressione sia a trazione, mentre nella realtà il terreno non reagisce a trazione; per tale motivo è necessario fare un controllo a posteriori sullo stato tensionale del terreno (deve essere sempre compresso).

Nella tabella seguente si riportano alcuni valori orientativi del coefficiente di sottofondo per alcune tipologie di terreno:

Coefficienti di sottofondo	
Sabbia molto compatta	$>15 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia compatta	$15 \div 7.5 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia mediamente compatta	$7.5 \div 3 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia mediamente sciolta	$3 \div 1.25 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia sciolta	$1.25 \div 0.4 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia molto sciolta	$<0.4 \text{ kg/cm}^3$
Sabbia e ghiaia compatta	$10 \div 30 \text{ kg/cm}^3$
Terreno coerente normalconsolidato	$1 \div 5 \text{ kg/cm}^3$
Terreno coerente sovraconsolidato	$15 \div 25 \text{ kg/cm}^3$

Consideriamo una trave di fondazione, soggetta ad un carico distribuito generico $q(z)$ all'estradosso (carico proveniente dalla struttura in elevazione) e soggetta alla reazione del terreno $r(z)$ agente all'intradosso:



linea elastica

$$v(z)$$

rotazione

$$\varphi = -\frac{dv}{dz}$$

curvatura

$$\chi = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M(z)}{EJ} = -\frac{d^2v}{dz^2}$$

$$T(z) = \frac{dM(z)}{dz} \quad \frac{T(z)}{EJ} = -\frac{d^3v}{dz^3}$$

Eq. della linea elastica:

$$p(z) = -\frac{dT(z)}{dz} = EJ \frac{d^4v}{dz^4}$$

Equazione differenziale in $v(z)$ del 4°
ordine

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} = p(z) = q(z) - r(z) \quad r(z) = k \cdot v(z)$$

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + k \cdot v(z) = q(z)$$

$v(z)$ è l'espressione della generica deformata della trave (integrale generale):

$$v(z) = v_0(z) + v_1(z)$$

$v_0(z)$ è soluzione della eq. omogenea associata; $EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + k \cdot v(z) = 0$

$v_1(z)$ è soluzione particolare dell'eq. differenziale completa

calcoliamo $v_1(z)$:

Assumendo che $q(z)$ al più è un'equazione di 3° grado $q(z) = C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z^1 + C_0$

si ha che $v_1(z) = \frac{q(z)}{k} = \frac{C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z^1 + C_0}{k}$

per carico costante : $v_1(z) = \frac{C_0}{k}$

per carico lineare : $v_1(z) = \frac{C_1 \cdot z + C_0}{k}$

calcoliamo $v_0(z)$:

$$EJ \frac{d^4 v}{dz^4} + k \cdot v(z) = 0$$

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 4\alpha^4 \cdot v(z) = 0 \quad \text{con } \alpha^4 = \frac{k}{4EJ}, \text{ cioè } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

$$\lambda^4 + 4\alpha^4 = 0 \quad \text{equazione caratteristica con soluzioni } \lambda_{1,2,3,4} = \pm \alpha \pm i\alpha$$

$$v_0(z) = B_1 e^{\lambda_1 z} + B_2 e^{\lambda_2 z} + B_3 e^{\lambda_3 z} + B_4 e^{\lambda_4 z}$$

$$v_0(z) = B_1 \sin(\alpha z) e^{\alpha z} + B_2 \cos(\alpha z) e^{\alpha z} + B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

Riassumendo l'integrale dell'equazione è pari a :

$$v(z) = v_0(z) + v_1(z)$$

dove :

$$v_1(z) = \frac{q(z)}{k} = \frac{C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z^1 + C_0}{k}$$
$$v_0(z) = B_1 \sin(\alpha z) e^{\alpha z} + B_2 \cos(\alpha z) e^{\alpha z} + B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

mentre le costanti vengono determinate in funzione delle condizioni al contorno.

OSS:

- l'integrale particolare dell'omogenea completa $v_1(z)$ tiene conto dei carichi distribuiti sulla trave;
- l'integrale generale dell'omogenea associata $v_2(z)$ considera gli effetti dei carichi concentrati e delle condizioni al contorno;

Risolta l'equazione della linea elastica e nota la $v(z)$, si possono determinare facilmente le seguenti grandezze:

deformata

$$v(z)$$

rotazione

$$\varphi = -\frac{dv}{dz}$$

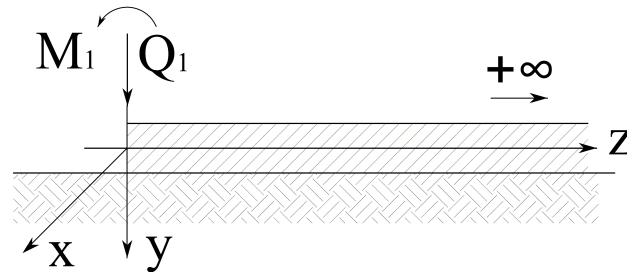
momento flettente

$$M(z) = -\frac{d^2v}{dz^2}$$

taglio

$$T(z) = -\frac{d^3v}{dz^3} EJ$$

TRAVE DI LUNGHEZZA INFINITA (SEMINFINITA)



Per $z=+\infty$ $e^{\alpha z} = +\infty$

B_1 e $B_2 = 0$, in caso contrario avrei cedimenti infiniti per carichi concentrati Q_1 e M_1 finiti, assurdo;

Per $z=+\infty$ $e^{-\alpha z} = 0$

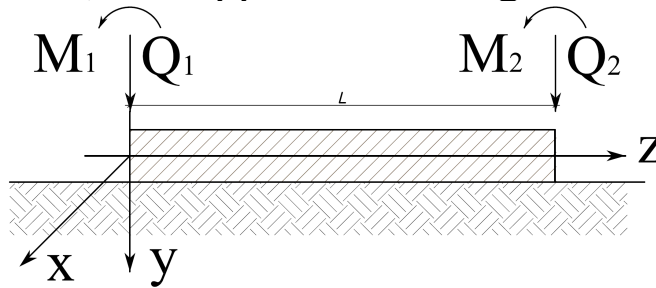
l'effetto dei carichi Q_1 e M_1 viene smorzato

Dunque per la trave infinita si ha:

$$v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

TRAVE DI LUNGHEZZA FINITA

Possiamo ottenere la soluzione effettiva, sovrapponendo i singoli effetti:



se la trave è sufficientemente lunga, gli effetti di Q_1 e M_1 sono trascurabili da un certo punto in poi, quindi anche se la lunghezza L è finita possono essere trattate come travi infinite.

La distinzione dipende dalla lunghezza L rapportata alle caratteristiche del fenomeno fisico.

L'espressione $v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$ rappresenta una funzione circolare smorzata (limitata) da una funzione esponenziale:

λ_0 viene chiamata lunghezza d'onda della trave
o **lunghezza di estinzione:**

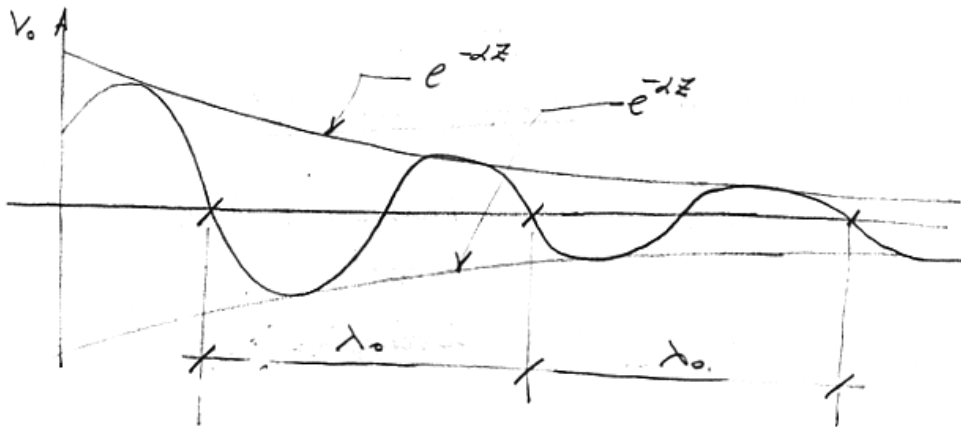
$$\alpha \lambda_0 = 2\pi$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$$

$$\lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4EJ}{k}}$$

EJ = rigidezza trave

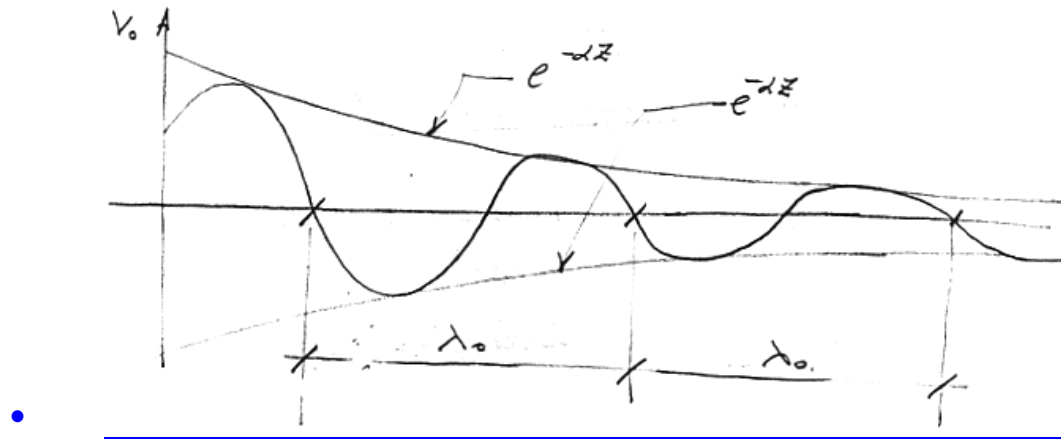
k = rigidezza terreno



Per $z = 0$ $e^{-\alpha z} = 1$

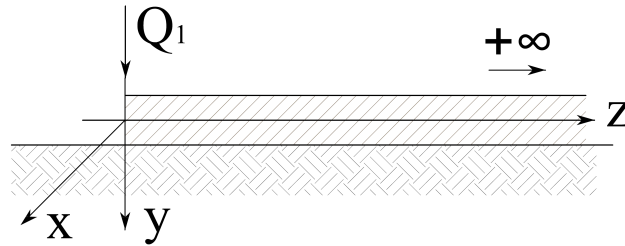
Per $z = \lambda_0$ $e^{-\alpha \lambda_0} = e^{-2\pi} = 1/500$ ad una distanza pari a λ_0 gli effetti dei carichi sono ridotti di 500 volte: praticamente viene annullato lo spostamento.

Dunque se la luce L è paragonabile rispetto a λ_0 posso considerare la trave di lunghezza infinita.



Esempi

Trave di lunghezza infinita (seminfinita), $\lambda > \lambda_0$, con carico concentrato Q_1



Per la trave infinita si ha:

$$v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

Condizioni al contorno:

per $z = 0$

$M = 0$ e $T = -Q$

cioè:

$$\begin{cases} M(z) = -\frac{d^2 v}{dz^2} EJ = 0 \\ T(z) = -\frac{d^3 v}{dz^3} EJ = -Q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_0(z)}{dz} &= B_3 (\alpha \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} - \alpha \sin(\alpha z) e^{-\alpha z}) + B_4 (-\alpha \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} - \alpha \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}) \\ &= -\alpha (B_3 + B_4) \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + \alpha (B_3 - B_4) \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} = 2\alpha^2 B_4 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} - 2\alpha^2 B_3 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

$$\frac{d^3 v_0(z)}{dz^3} = -2\alpha^3 (B_4 - B_3) \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + 2\alpha^3 (B_4 + B_3) \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

per $z = 0$ $M(z) = 0$, cioè

$$\begin{cases} \frac{M(z)}{EJ} = -\frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \\ 2\alpha^2 B_3 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = 0, \end{cases} \quad B_3 = 0$$

per $z = 0$ $T(z) = -Q$, cioè

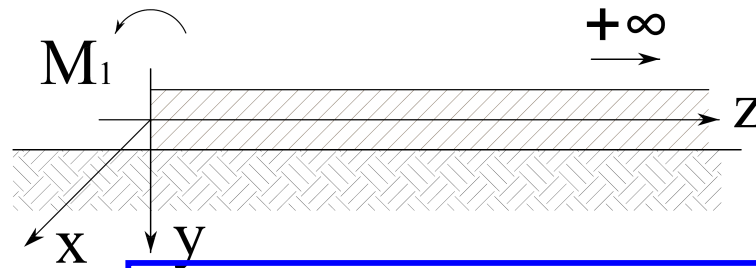
$$\begin{cases} \frac{T(z)}{EJ} = -\frac{d^3 v}{dz^3} = \frac{Q}{EJ} \\ 2\alpha^3 B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = \frac{Q}{EJ}, \end{cases} \quad B_4 = \frac{Q}{2\alpha^3 EJ}$$

Quindi la deformata vale:

$$v_0(z) = \frac{Q}{2\alpha^3 EJ} \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} \quad \text{con } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

che rappresenta l'eq. della linea elastica di una trave infinita con un carico concentrato Q_1 .

Esempio di trave di lunghezza infinita (seminfinita), $\lambda > \lambda_0$, con coppia concentrata M_1



Per la trave infinita si ha:

$$v_0(z) = B_3 \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} + B_4 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z}$$

Condizioni al contorno:

per $z = 0$ $M = M_1$ e $T = 0$

$$M(z) = -\frac{d^2 v}{dz^2} EJ = M_1,$$

$$-2\alpha^2 B_3 \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad B_3 = \frac{M_1}{2\alpha^2 EJ}$$

$$T(z) = -\frac{d^3 v}{dz^3} EJ = 0,$$

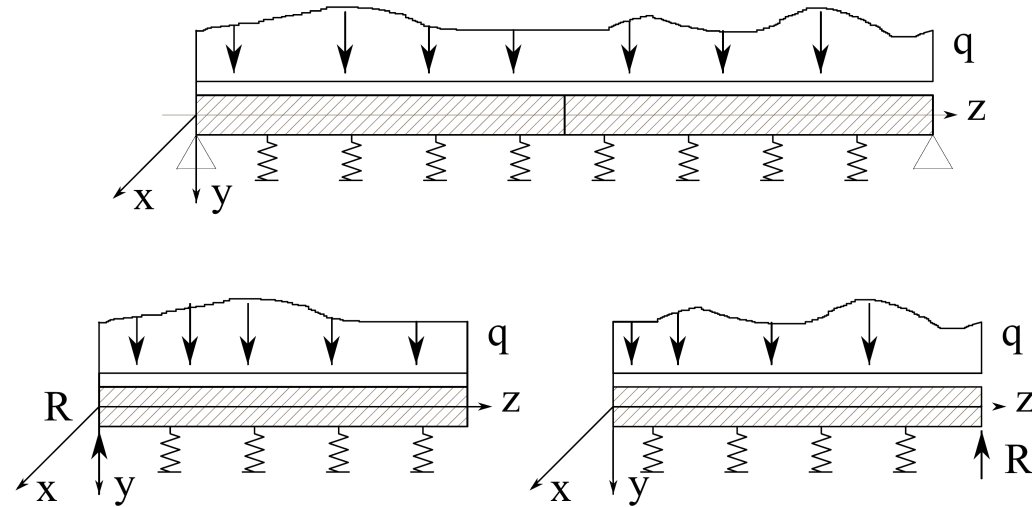
$$2\alpha^3 (B_4 + B_3) \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} = 0, \quad B_4 = -B_3 = -\frac{M_1}{2\alpha^2 EJ}$$

Quindi la deformata vale:

$$v_0(z) = \frac{M_1}{2\alpha^2 EJ} \sin(\alpha z) e^{-\alpha z} - \frac{M_1}{2\alpha^2 EJ} \cos(\alpha z) e^{-\alpha z} \quad \text{con } \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

che rappresenta l'equazione della linea elastica di una trave infinita con una coppia concentrata M_1 .

Esempio di trave su terreno elastico e appoggi fissi



Ipotizzo che la trave sia infinita e studio separatamente la trave di sinistra e quella di destra.

Per ciascun concio di trave ho una soluzione è del tipo:
condizioni al contorno:

$$v(z) = v_0(z) + v_1(z)$$

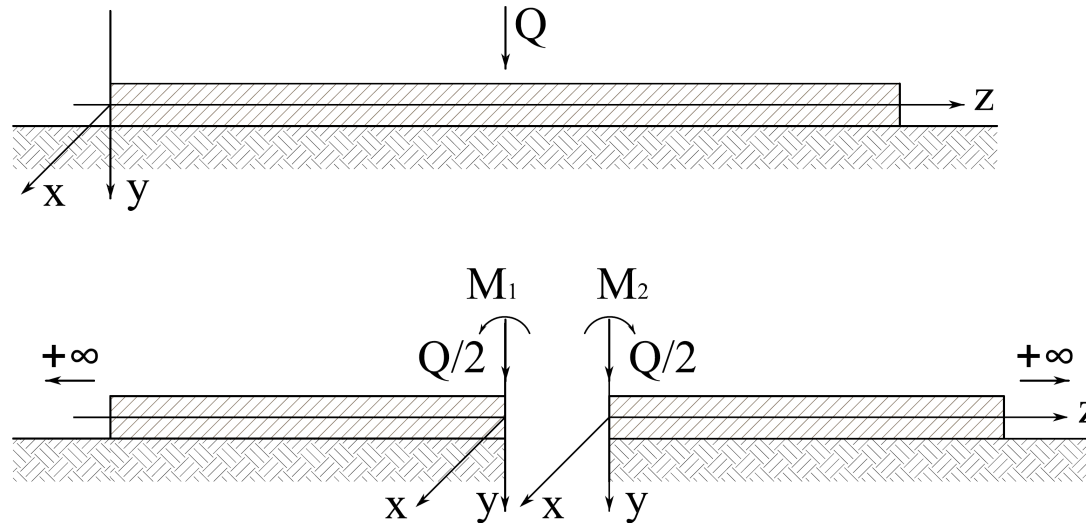
per $z = 0$ si ha $v = 0, M = 0, T = R$

in tutto 3 equazioni e 3 incognite (B_3, B_4, R);

OSS:

se non avessi potuto considerare la trave di lunghezza infinita, le tre equazioni di un concio sarebbero state dipendenti dalle altre 3 del concio complementare, 6 equazioni e 6 incognite.

Esempio di trave su terreno elastico con carico concentrato a distanza a dal bordo libero

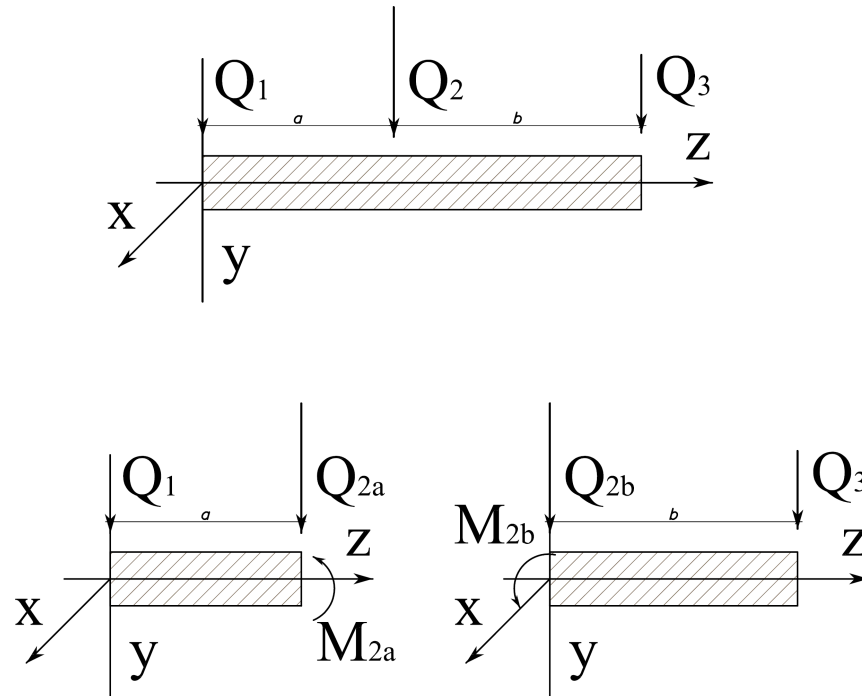


Si risolvono le due semitravi ipotizzate infinite, determinando le incognite Q_1 e M_1 , Q_2 e M_2 imponendo anche:

$$\begin{array}{ll} Q_1 + Q_2 = Q & M_1 = M_2 \\ v_1 = v_2 & \varphi_1 = \varphi_2 \end{array}$$

Affinché le due semitravi si possano definire di lunghezza infinita, ciascun concio deve essere lungo almeno λ_0 .

Esempio di trave su terreno elastico con 3 carichi concentrati



Se la trave è assimilabile ad una trave infinita si può dividere in due conci e trattarli separatamente con le equazione di congruenza nella sezione di separazione.

Se ciascun concio non è infinito, i carichi all'estremità non si possono considerare indipendenti da quelli centrali, quindi le equazioni da svolgere sono complete (4 incognite ciascuna).

Se anche le semitravi posso essere considerate infinite, si può ulteriormente scomporre il problema.

Esempi

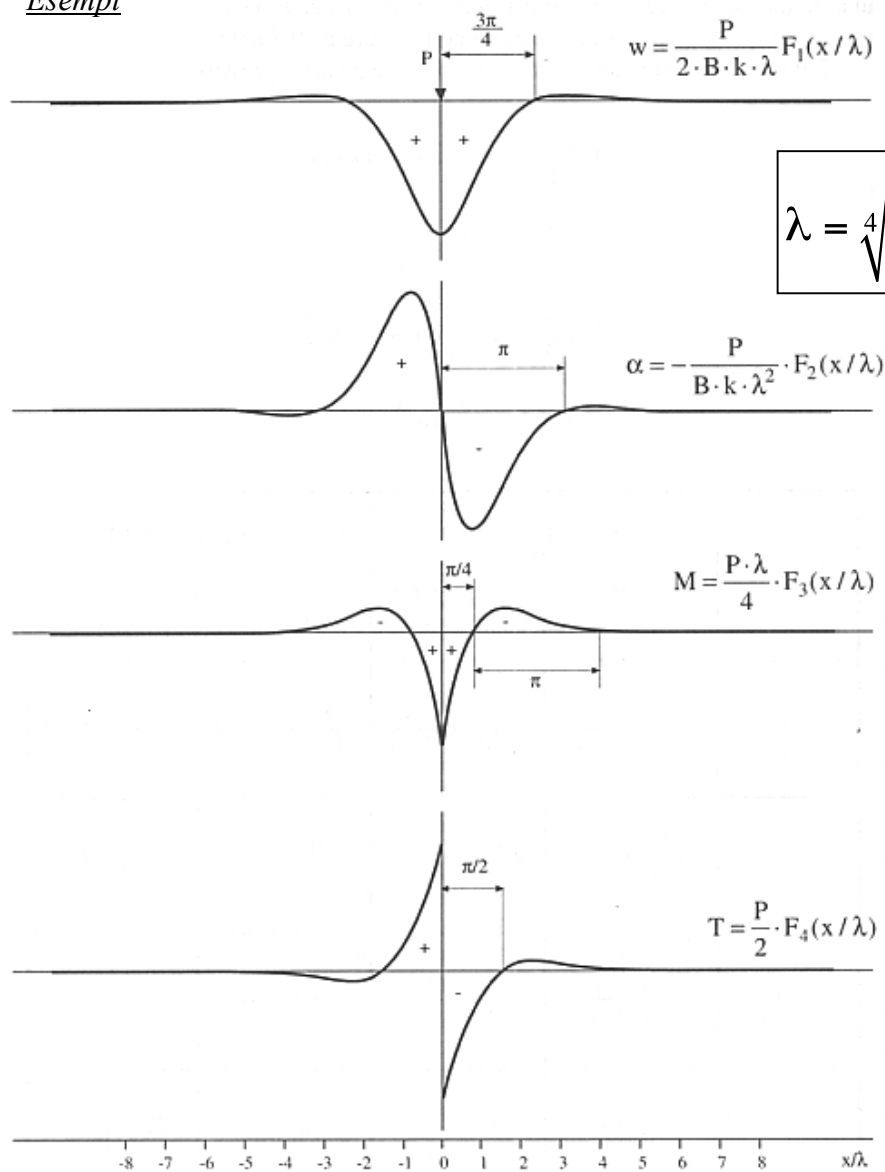


Fig. 9.3. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una sezione qualsiasi da una forza concentrata

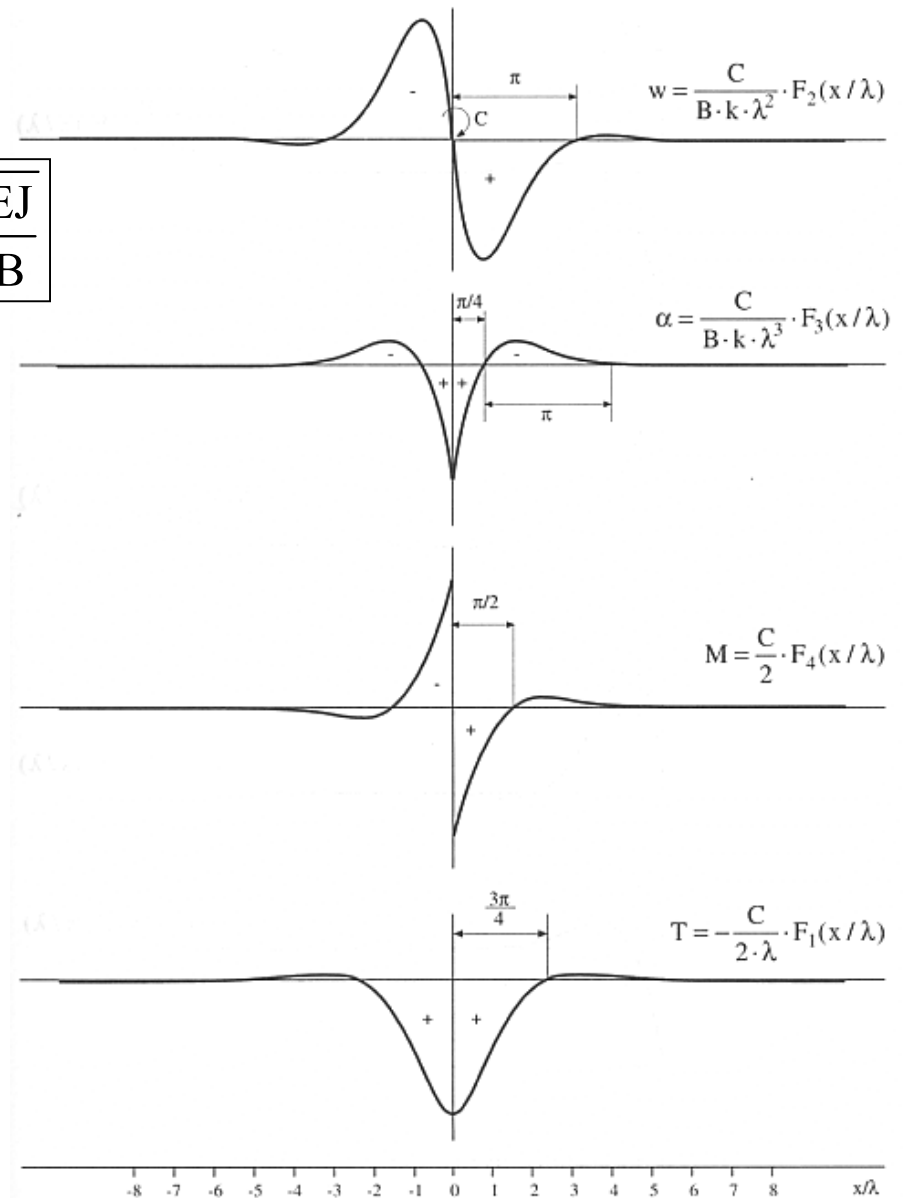


Fig. 9.4. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una sezione qualsiasi da una coppia concentrata

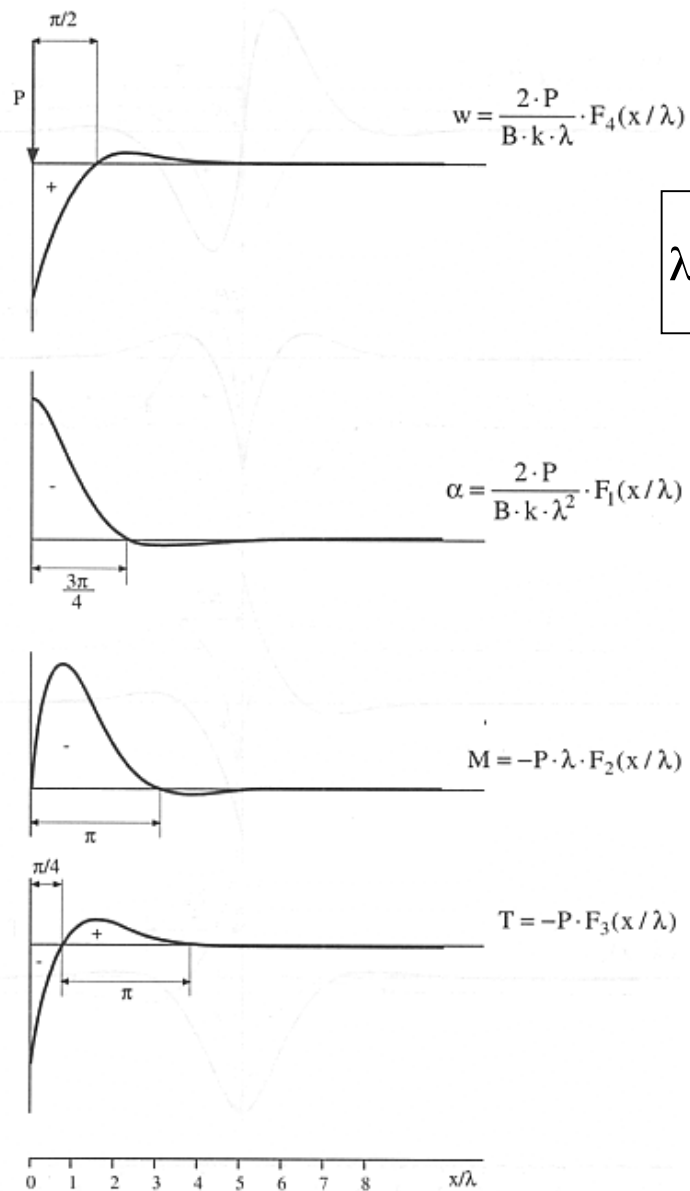


Fig. 9.5. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una estremità da una forza concentrata

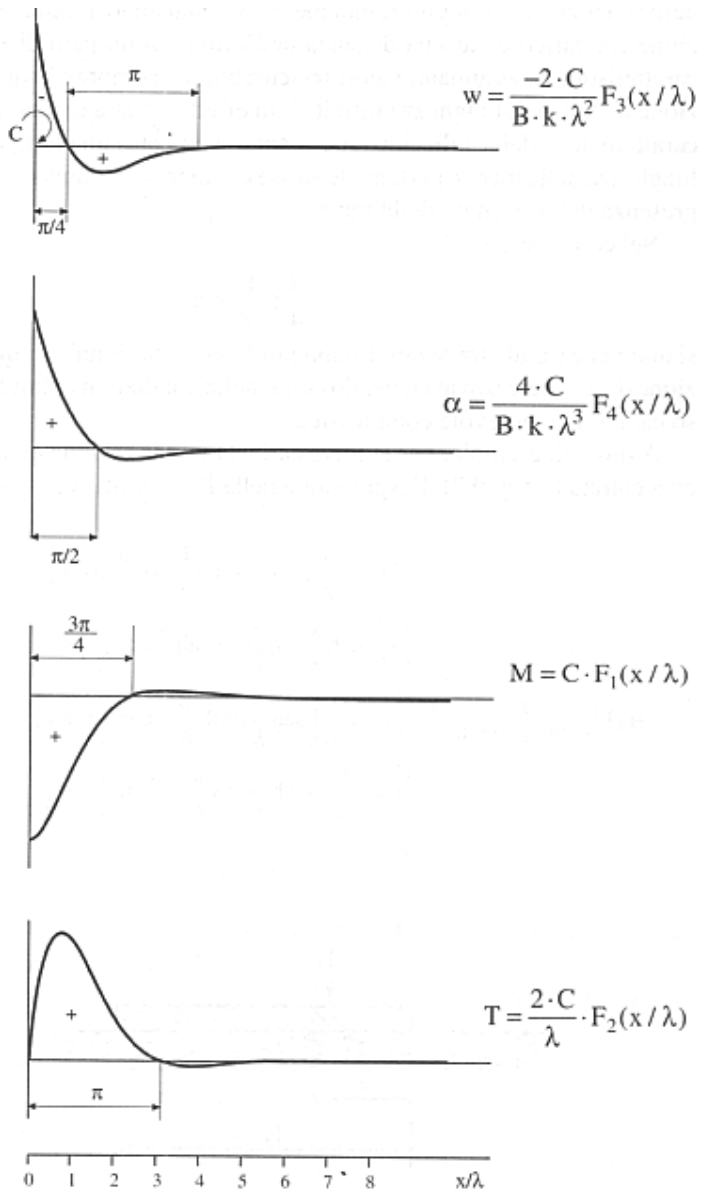


Fig. 9.6. Soluzioni per la trave di lunghezza infinita su suolo alla Winkler, caricata in una estremità da una coppia concentrata