Caso ortogonale

Lemma Se A è una matrice 2×2 ortogonale allora

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ rotazione}$$

oppure

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \text{ riflessione}$$

Dim

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

A ortogonale $\Rightarrow {}^tAA = E_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (a,b) \\ (c,d) \end{matrix} \text{ stanno sulla circonferenza } x^2+y^2=1$$

Esistono angoli $0 \le \alpha, \alpha' < 2\pi$ tali che

$a = \cos\alpha \quad b = \operatorname{sen}\alpha$

$c = \operatorname{sen}\alpha' \quad d = \cos\alpha'$

Utilizziamo l'uguaglianza $ac+db=0$

e tramite sostituzione otteniamo

$$0 = \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha' + \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha'$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha')$$

$$\alpha+\alpha' = 0 + k\pi$$

Siccome $0 \leq \alpha, \alpha' < \pi$ $\qquad \alpha+\alpha' = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

1° caso $\qquad \alpha+\alpha'=0, 2\pi \Rightarrow \alpha=-\alpha'$ o $\alpha=-\alpha'+2\pi$

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha'$$
$$\cos\alpha = \cos\alpha'$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2° caso $\qquad \alpha+\alpha'=\pi, 3\pi \Rightarrow \alpha=-\alpha'+\pi$ o $\alpha=-\alpha'+\pi+\pi$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha'$$
$$\cos\alpha = -\cos\alpha'$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha' \end{pmatrix}$$

$\boxtimes$

Oss Rotazioni:

$$\det\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=1$$

Abbiamo già visto che $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ non ha autovalori a meno che $\alpha=0,\pi$

$$\begin{pmatrix}\cos 0 & -\operatorname{sen} 0\\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos \pi & -\operatorname{sen} \pi\\ \operatorname{sen} \pi & \cos \pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

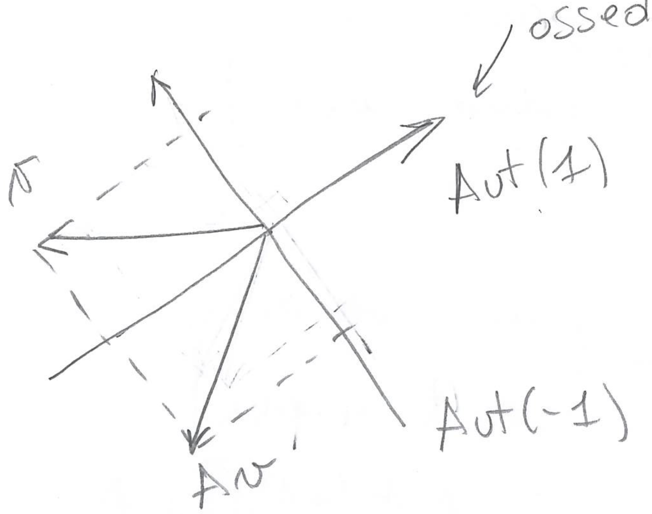
Riflessioni

$$\det\begin{pmatrix}\cos\alpha & +\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}=-1$$

autovettori sono gli zeri di $p(x)=(\cos\alpha-x)(-\cos\alpha-x)-\operatorname{sen}^2\alpha$

$$P(x)=x^2-\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=x^2-1$$

Per ogni α ha due autovalori $1,-1$



$\dim Aut(1)=$
$=\dim Aut(-1)=1$

Inoltre

$Aut(1)\perp Aut(-1)$

Teorema (Forma normale per automorfismi ortogonali

Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita e $f : V \longrightarrow V$ un automorfismo ortogonale

Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V tale che

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{matrix} & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \begin{matrix} \cos\alpha_k & -\operatorname{sen}\alpha_k \\ \operatorname{sen}\alpha_k & \cos\alpha_k \end{matrix} \end{array}\right)$$

riflessioni

rotazioni

dimostrazione

Induzione su $n = \dim(V)$

$\boxed{n=1}$ matrice ortogonale 1×1 è (1) o (-1)

$\boxed{n=2}$ sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V

Lemma

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

oppure

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto: $V = \mathrm{Aut}(+1) \perp \mathrm{Aut}(-1)$

posso scegliere $v_1 \in Aut(1)$ tale che $\|v_1\| = 1$ (45)
e $v_2 \in Aut(-1)$ tale che $\|v_2\| = 1$.

$\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ base ortonormale di V

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

passo induttivo

Lemma Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ tale che $1 \leq \dim V$ e finita
Sia $f: V \longrightarrow V$ un endomorfismo
allora esiste $W \subseteq V$ sottospazio tale che
$\dim W = 1$ o 2 e $f(W) \subseteq W$ (W invariante rispetto a f)

Dim
- Se f ha un autovalore λ allora ha un autovettore $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$

$W = \langle v \rangle$

$\dim W = 1$ e $f(W) \subset W$

- altrimenti fissiamo $\mathcal{B}$ base di V e considero $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ matrice reale $n \times n$

Posso definire

$$L_c(A) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \longrightarrow A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$L_c(A)$ ha un autovalore <u>complesso</u> $a \in \mathbb{C}$
(attenzione: autovettori in $\mathbb{C}^n$)

Osserviamo che $P_{L(A)}(x) = P_A(x)$

perchè $A = M_{\mathcal{C}}(L_c(A))$ dove $\mathcal{C}$ base canonica
e quindi $P_{L(A)}(x) = P_A(x)$ ha coefficienti reali

i.e. $P_A(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$ con $c_i \in \mathbb{R}$

$$P_A(a) = 0 \Rightarrow \overline{P_A(a)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} c_i a^i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i}\, \overline{a}^i = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \overline{a}^i = P_A(\overline{a}) = \overline{0} = 0$$

$c_i \in \mathbb{R}$

Anche $\overline{a}$ è un autovalore di $L_c(A)$
e possiamo supporre $a \neq \overline{a}$
(se $a = \overline{a}$ allora $a \in \mathbb{R}$ e torniamo al caso precedente)

$v \in \mathbb{C}^n$ autovettore di $L_c(A)$

$$Av = av$$

inoltre

$$\overline{Av} = \bar{A}\,\bar{v} = A\,\bar{v} = \overline{av} = \bar{a}\,\bar{v} \Rightarrow \bar{v} \text{ autovettore rispetto ad } \bar{a}$$

A matrice reale

$v, \bar{v}$ sono linearmente indipendenti perchè autovettori di autovalori diversi

$$v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

$$v + \bar{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Re}\, \bar{z}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad i(v - \bar{v}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\, z_1 \\ \vdots \\ -\mathrm{Im}\, z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$(z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z)$

i) $v + \bar{v}$ $\quad i(v - \bar{v})$ sono linearmente indipendenti

$$\lambda_1 (v + \bar{v}) + \lambda_2 i (v - \bar{v}) = 0$$

$$(\lambda_1 + i\lambda_2) v + (\lambda_1 - i\lambda_2) \bar{v} = 0$$

$v, \bar{v}$ linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + i\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - i\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - i\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Conseguenze:

Sia $W = \langle v+\bar{v}, i(v-\bar{v}) \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

allora $\dim W = 2$

ii) consideriamo $L(A): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

allora $L(A)(W) \subseteq W$

$$L(A)(v+\bar{v}) = A(v+\bar{v}) = Av + A\bar{v}$$

$$= av + \bar{a}\bar{v} = (x+iy)v + (x-iy)\bar{v} =$$

$a = x+iy$

$$= x(v+\bar{v}) + y(i(v-\bar{v})) \in W$$

$$L(A)(i(v-\bar{v})) = A(i(v-\bar{v})) =$$

$$= iAv - iA\bar{v} = iav - i\bar{a}\bar{v}$$

$$= (ix-y)v - (ix+y)\bar{v}$$

$$= -y(v+\bar{v}) + x(i(v-\bar{v})) \in W$$

iii) questo risultato è valido per $L(A)$ rappresentazione in coordinate di f

$\Longrightarrow$ vale anche per f

nel dettaglio:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_\beta"'] & V \arrow[d, "K_\beta"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L(A)"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

vale che

K_β isomorfismo

e $K_\beta \circ f = L(A) \circ K_\beta$

$(L(A) = K_\beta^{-1} \circ f \circ K_\beta)$

Consideriamo $\tilde{W} = K_\beta^{-1}(W)$ $(\dim \tilde{W} = 2)$

$$L(A)(\tilde{W}) = K_\beta^{-1} \circ f \circ K_\beta(\tilde{W}) =$$

$$= K_\beta^{-1} \circ f \circ K_\beta(K_\beta^{-1}(W)) = K_\beta^{-1} \circ f(W)$$

$$\subseteq K_\beta^{-1}(W) = \tilde{W}$$

■ fine dimostrazione lemma

Rinizia dimostrazione teorema:

<u>passo induttivo</u>

ricordo $f: V \to V$ ortogonale $\dim V = n$

Per il lemma esiste W tale che

$\dim W = 1, 2$ e $f(W) \subseteq W$

Siccome f automorfismo vale anche che $f(W) = W$ $(\dim f(W) = \dim W)$

da cui $v \in W^{\perp}$

$\Longrightarrow$

$v \perp w$

$\Longrightarrow$ f mantiene il prodotto scalare

$f(v) \perp f(w)$

$\Longrightarrow$ $f(w)=w$

$f(v) \perp w$

$\Longrightarrow$

$f(v) \in W^{\perp}$

Ottengo quindi

$f(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$ (anche qua $f(W^{\perp}) = W^{\perp}$)

Considero $\mathcal{B}_1$ base di W

$\mathcal{B}_2$ base di $W^{\perp}$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base di V

Siccome $f(W) \subseteq W$ e $f(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$

posso considerare $f|_W : W \to W$

e $f|_{W^{\perp}} : W^{\perp} \to W^{\perp}$ endomorfismi ortogonali

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}_1}(f|_W) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}_2}(f|_{W^{\perp}}) \end{array}\right)$$

matrice 1×1 o 2×2 come da tesi per casi n=1,2

come da tesi per ipotesi induttiva

■ fine dimostrazione teorema

Corollario Se A è una matrice ortogonale allora esiste una matrice ortogonale S tale che

$$S^{-1}AS = {}^{t}SAS$$

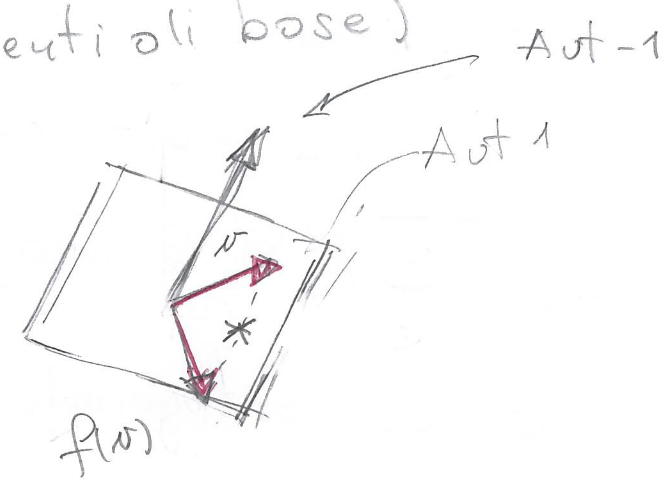
è della forma del teorema

Dimostrazione: uguale al caso unitario

Esempio: applicazioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ (a meno di cambiamenti di base)

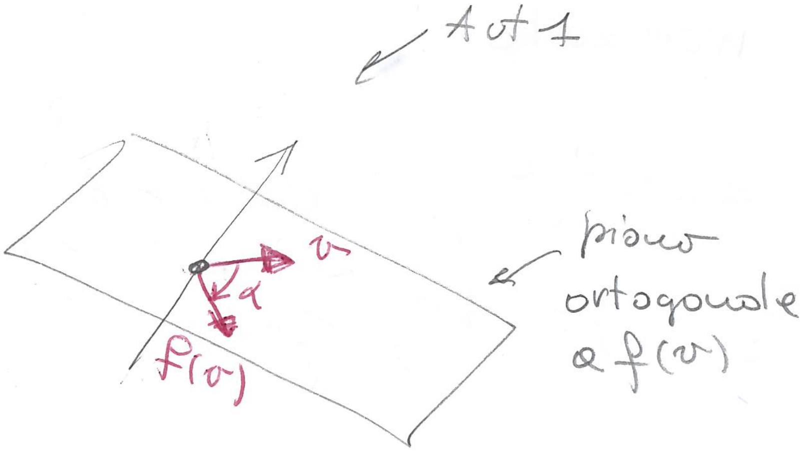
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

riflessioni rispetto un piano



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotazioni lungo un asse



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ composizione delle due cose

---

Esercizio: Considerare la matrice unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & +\cos\alpha \end{pmatrix}$$

e calcolare una matrice S

tale che ${}^t\overline{S}AS$ è diagonale

(come matrice ortogonale è già in forma normale)

Risoluzione

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - x & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - x \end{pmatrix}$$

$$= (\cos\alpha - x)^2 + \operatorname{sen} \alpha$$

$$= x^2 - 2\cos\alpha\, x + \underbrace{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}_{\substack{\shortparallel \\ 1}}$$

$P_A(x)=0$ ha come soluzioni complesse:

$$\cos\alpha \pm i \operatorname{sen}\alpha = e^{\pm i\alpha}.$$

La forma normale sarà:

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovettori di $\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}$ risolvendo il sistema:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha-(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha) & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha-(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo il metodo di eliminazione di Gauß:

$$\begin{pmatrix} -i\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -i\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{i I riga}]{\text{II riga -}} \begin{pmatrix} -i\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Aut}(e^{i\alpha}) = 1$$

$$\operatorname{Aut}(e^{i\alpha}) = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle$$

vettore di norma 1

Analogamente

$$\mathrm{Aut}(e^{-i\alpha}) = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle$$

da cui:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)$$ base ortonormale di autovettori

e

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

ENDOMORFISMI AUTOAGGIUNTI

Def V spazio vettoriale euclideo o unitario

$f: V \longrightarrow V$ endomorfismo si dice autoaggiunto se per ogni $v, w \in V$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$$

Prop $\mathcal{B}$ base ortonormale di V

$f: V \longrightarrow V$ è autoaggiunto

$$\Longleftrightarrow$$

$M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica (caso $K = \mathbb{R}$)

oppure

$M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana (caso $K = \mathbb{C}$)

Ricordo che: A è simmetrica $\Longleftrightarrow {}^tA = A$

A è hermitiana $\Longleftrightarrow {}^t\bar{A} = A$

Dim (caso complesso)

Denotiamo $M_{\mathcal{B}}(f) = A$

f auto-aggiunto

$\iff$

$\forall v, w \in V \quad \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$

$\iff$ posso in coordinate usando base $\mathcal{B}$

$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

$\iff$ $\mathcal{B}$ base ortonormale $\langle\,,\rangle$ prodotto scalare standard

$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad {}^t\overline{(Ax)}\, y = {}^t\overline{x} A y$

$\qquad \| $

${}^t\overline{x}\, {}^t\overline{A}\, y$

$\iff$ Proposizione già dimostrata e utilizzata

${}^t\overline{A} = A$

$\iff$

A hermitiana

$\blacksquare$

<u>Proposizione</u> Sia $f: V \to V$ endomorfismo autoaggiunto

1) λ autovalore di $f \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
(caso reale è banale)

2) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali

<u>Dim</u> 1) Sia $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$
Sappiamo che:

$$\begin{array}{ccc} \langle f(v), v \rangle & = & \langle v, f(v) \rangle \\ \| & & \| \\ \langle \lambda v, v \rangle & & \langle v, \lambda v \rangle \\ \| & & \| \\ \bar{\lambda} \langle v, v \rangle & & \lambda \langle v, v \rangle \end{array}$$

Siccome $\langle v, v \rangle \neq 0$ abbiamo che $\bar{\lambda} = \lambda$

cioè $\lambda \in \mathbb{R}$

2) Sia v autovettore di λ, w autovettore di μ
con $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{ccc} \langle f(v), w \rangle & = & \langle v, f(w) \rangle \\ \| & & \| \\ \langle \lambda v, w \rangle & & \langle v, \mu w \rangle \\ \| & & \| \\ \lambda \langle v, w \rangle & & \mu \langle v, w \rangle \end{array}$$

$\boxed{\text{attenzione } \lambda \in \mathbb{R}}$

da cui

$$(\lambda-\mu)\langle v, w\rangle = 0$$

siccome $\lambda-\mu \neq 0$ otteniamo $\langle v, w\rangle = 0$

$\blacksquare$

TEOREMA (teorema spettrale per endomorfismi autoaggiunti)

Sia V spazio vettoriale euclideo o unitario, $\dim V = n < \infty$

e $f: V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto

Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V di autovettori di f e ogni autovalore è reale

In particolare f è diagonalizzabile

Dim $\boxed{K = \mathbb{C}}$

dimostrazione per induzione su n

$\boxed{n=1}$ banalmente verificato

$\boxed{\text{passo induttivo}}$

Teorema fondamentale dell'algebra

$\Longrightarrow$

Esiste un autovalore λ di f

$\Longrightarrow$

Esiste v_1 tale che $v_1 \neq 0$ e $f(v_1) = \lambda v_1$

Posso supporre $\|v_1\| = 1$
(altrimenti sostituisco v_1 con $\frac{v_1}{\|v_1\|}$)

Definiamo $W = v_1^{\perp} = \{ v \in V \mid v \perp v_1 \}$

Vale che i) $V = \langle v_1 \rangle \perp W$

ii) $\dim W = n - 1$

iii) $f(W) \subseteq W$

Dimostrazione punto iii)

Sia $v \in W$ allora $\langle v_1, v \rangle = 0$

da cui $\lambda \langle v_1, v \rangle = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \langle \lambda v_1, v \rangle = 0$

$\Longrightarrow \langle f(v_1), v \rangle = \langle v_1, f(v) \rangle = 0$

$$\Longrightarrow f(v) \in v_1^{\perp} = W$$

Possiamo quindi considerare $f|_W : W \longrightarrow W$

endomorfismo autoaggiunto

$\dim W = n-1 \Longrightarrow$ posso usare ipotesi induttiva

$\Longrightarrow \exists\ (v_2, \dots, v_n)$ base ortonormale di W di autovettori di $f|_W$ (e di f)

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ è la base cercata

$\boxed{k = \mathbb{R}}$ Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V

$$P_f(x) = P_{M_\mathcal{B}(f)}(x)$$

- $P_f(x)$ ha almeno uno zero complesso λ
- $M_\mathcal{B}(f)$ simmetrica a valori reali (quindi hermitiana)
- λ autovalore di $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ autoaggiunto, $x \longrightarrow M_\mathcal{B}(f)\, x$
- $\Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow f$ ha un autovalore reale

A questo punto si può riproporre la stessa dimostrazione proposta per $\mathbb{C}$

$\boxed{\Sigma}$

<u>Oss</u>: A matrice simmetrica ($K=\mathbb{R}$) o hermitiana ($K=\mathbb{C}$)

$L(A): K^n \longrightarrow K^n$ è un endomorfismo autoaggiunto

<u>Corollario</u> A matrice simmetrica (risp. hermitiana) allora esiste una matrice ortogonale (risp. ortogonale) S tale che

$$S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS$$

è una matrice diagonale a valori reali.

<u>Dim</u>: A matrice simmetrica o hermitiana

$\Rightarrow$ $L(A): K^n \longrightarrow K^n$ autoaggiunta

$\underset{\text{Teor. Spett.}}{\Rightarrow}$ Esiste $\mathcal{B}$ base ortonormale di autovettori

$$\Rightarrow M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id_{K^n})\underbrace{M_{\mathcal{C}}(L(A))}_{=A} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_{K^n}) = M_{\mathcal{B}}(L(A))$$

- $M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}(Id_{K^n}) = S$ le colonne sono date dalle coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ nella base standard $\Rightarrow$ i vettori colonna sono ortonormali $\Rightarrow$ S hermitiana

- $M_{\mathcal{B}}(L(A)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

autovalori

$\boxtimes$

<u>Corollario</u> $f: V \longrightarrow V$ autoaggiunta

$\Rightarrow V = Aut(\lambda_1) \oplus \dots \oplus Aut(\lambda_k)$

($\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di f)

Applicazione teorema spettrale:

Esempio

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_3 = 1 \right\}$$

X è una superficie in $\mathbb{R}^3$

Proviamo ad analizzarla.

Rappresentiamo X tramite forma bilineare e simmetrica:

$$2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 3x_1x_3 - 3x_3x_1 = 1$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1$$

A matrice simmetrica

Uso teorema spettrale:

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ -3 & 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = (2-x)(-1-x)(2-x) + 9(1+x)$$

$$= -(x^2-4x+4)(-1-x) + 9(1+x)$$

$$= -x^3+4x^2-4x-x^2+4x-4+9+9x$$

$$= -x^3+3x^2+9x+5$$

-1 è una radice di $P_A(x)$
(cerco fra i divisori interi di 5
o osservo la matrice $A - xE_2$)

$$P_A(x) = (x+1)(-x^2+4x+5)$$ (Regola di Ruffini o divisione di polinomi)

$$= -(x+1)(x+1)(x-5)$$

Esiste S matrice 3×3 ortogonale tale che

$$S^{-1}AS = {}^tSAS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

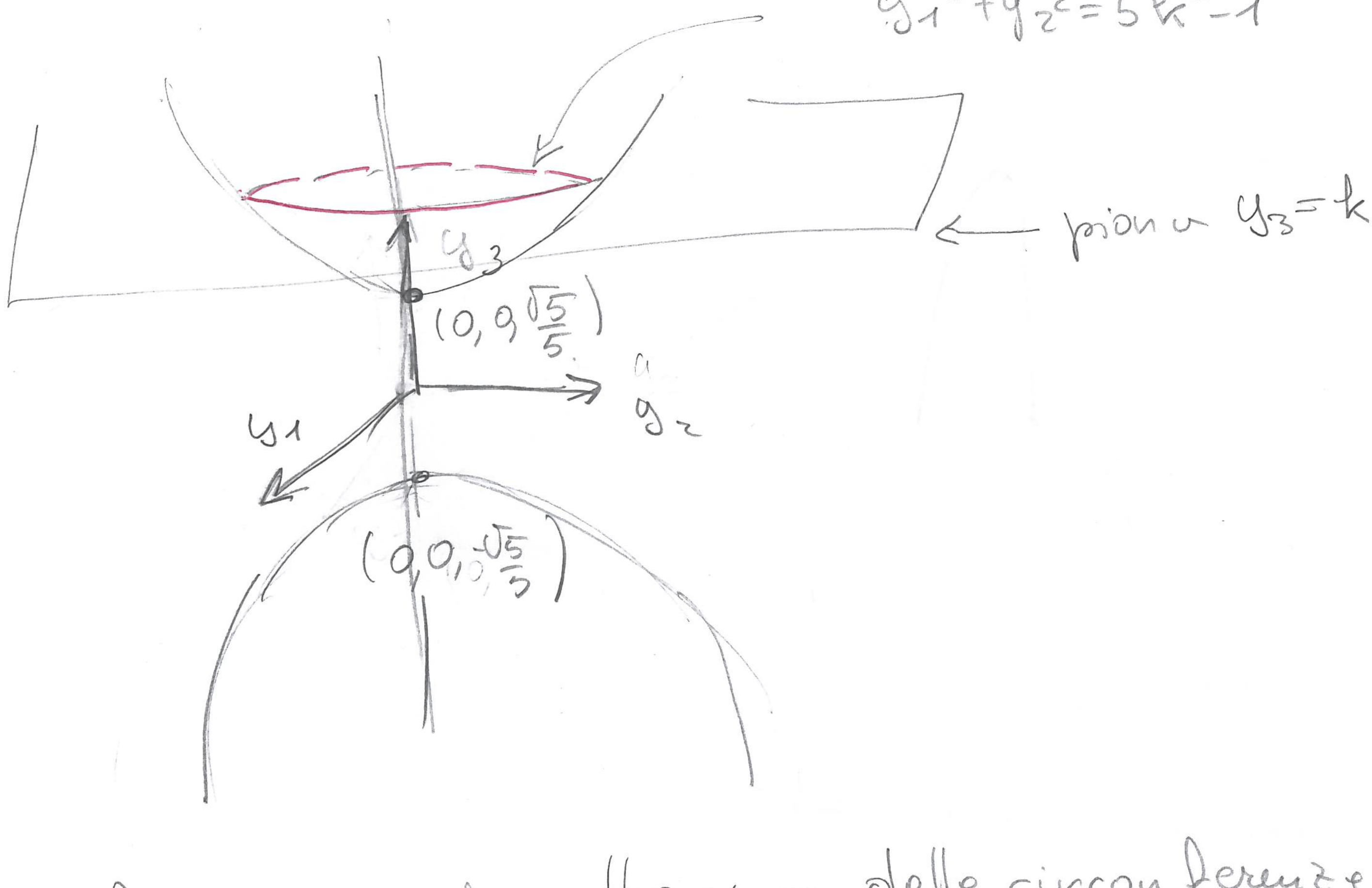
Operiamo un cambiamento di variabile

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(evidenziamo "assi principali")

$$(y_1\,y_2\,y_3)\ \underbrace{{}^tS\,A\,S}_{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=1$$

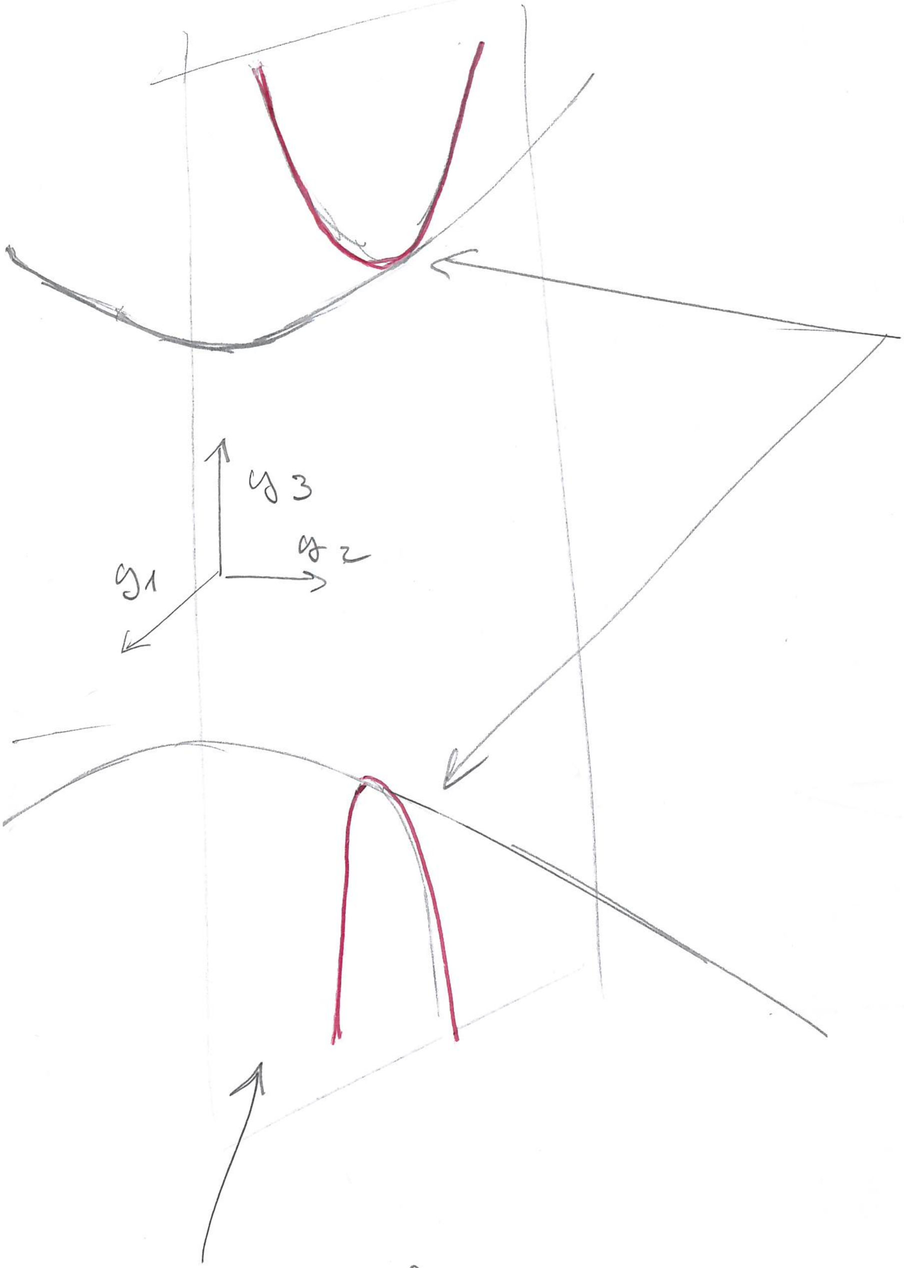
otteniamo $\quad -y_1^2-y_2^2+5y_3^2=1$



Se fisso $y_3=k$ ottengo delle circonferenze per $k<\frac{\sqrt5}{5}$ o per $k>-\frac{\sqrt5}{5}$

per $k=\pm\frac{\sqrt5}{5}$ ottengo un punto

per $k\in\left(-\frac{\sqrt5}{5},\frac{\sqrt5}{5}\right)$ non ho nessuna soluzione se fissiamo $y_1 = k$, $y_2 = k$ otteniamo delle iperboli



$$5y_3^2 - y_1^2 = 1 + k^2$$

piano $y_2 = k$

abbiamo analizzato

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2 = 1 \right\}$$

$$X = S\,Y$$

↳ matrice ortonormale non deforma le lunghezze

Possiamo usare un ulteriore cambio di coordinate usando le base

$$(1,0,0) \quad (0,1,0) \quad \left(0,0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

(base ortogonale ma <u>non</u> ortonormale)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} z_3 \end{cases}$$

otteniamo la superficie di equazione:

$$-z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 = 1$$

(questa volta deformo le lunghezze).

In generale

TEOREMA (trasformazione ad assi principali)

$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica

$A = M_{\mathcal{C}}(b)$ dove $\mathcal{C}$ è la base canonica

($M_{\mathcal{C}}(b)$ matrice simmetrica associata a forma bil.)

i) allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A,

in particolare esiste $S = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^n})$ ortogonale

tale che $M_{\mathcal{B}}(b) = {}^tSAS$ è

diagonale

(conseguenza del teorema spettrale)

ii) esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A tale che

$$M_{\mathcal{B}'}(b) = {}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $T = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(Id_{\mathbb{R}^n})$

<u>Attenzione</u>: T in generale <u>non</u> è ortogonale ${}^tT = T^{-1}$ e ${}^tTAT$ non è una matrice simile ad A

<u>Dim</u> (vedi esempio)

Oss

$$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \longrightarrow b(X,X)$$

viene detta forma quadratica associata a b

(forme quadratiche corrispondono a polinomi omogenei di grado 2)

teorema precedente si può interpretare nel seguente modo:

q forma quadratica

i) esiste un cambiamento di base ortonormale tale che

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

ii) esiste un cambiamento di base tale che

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \quad - x_{r+s}^2$$

Def $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica

b è definita positiva (risp. definita negativa) se $b(x,x) > 0$ (risp $b(x,x) < 0$)

per ogni $x \in V \setminus \{0\}$

(analogamente si possono definire forme quadratiche definite positive / negative)

<u>Esempi</u> I prodotti scalari reali sono forme bilineari simmetriche definite positive

<u>Teorema</u> (di Sylvester o legge di inerzia di Sylvester)

Sia V spazio vettoriale reale e $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica

Sia $\mathcal{B}$ una base e $M_{\mathcal{B}}(b)$ la matrice simmetrica associata a $\mathcal{B}$

Il numero di autovalori positivi, negativi e nulli (contati con le loro molteplicità) non dipende da $\mathcal{B}$

<u>Dim</u>: trovo $\mathcal{B}$ base ortonormale per cui $M_{\mathcal{B}}(b)$ è diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \lambda_t & & & & & \\ & & & \lambda_{t+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_{t+s} & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i > 0$ per $i = 1, \dots, t$
$\lambda_i < 0$ per $i = t+1, \dots, t+s$

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

Definisco $W_+ = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$

$W_- = \langle v_{r+1}, \dots, v_{r+s} \rangle$

$W_0 = \langle v_{r+s+1}, \dots, v_n \rangle$

- b è def positivo (risp. negativa) su W_+ (risp. W_-)
  b è costante 0 su W_-
- $V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$

punto chiave: r è la dimensione massima di un sottospazio U dove b è definita positiva

Se b è definita positiva su U
allora $U \cap W_- \oplus W_0 = \{0\}$
(se $v \in W_- \oplus W_0$ $b(v,v) \leq 0$)

$\Rightarrow$ $U \oplus W_- \oplus W_0 \leq V$ sottospazio

$\dim (U \oplus W_- \oplus W_0) \leq \dim V$

$\dim U + \dim W_- + \dim W_0 \leq n$

$\dim U + s + n - r - s \leq n$

$\dim U \leq r$

| fine dimostrazione punto chiave |

Questa caratterizzazione di r non dipende dalla base scelta

Possiamo fare la stessa cosa per s

$$\Longrightarrow$$

Il numero di autovalori negativi, positivi (e nulli) non dipende dalla base scelta

$\blacksquare$