Esercizi Geometria 1
Foglio 12

Esercizio 1. Nel foglio 11 sono state calcolate la forma normale diagonale delle seguenti matrici considerate come matrici unitarie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcoli ora la forma normale di queste matrici considerate come matrici ortogonali.

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice ortogonale che rappresenta una riflessione

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ \mathrm{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Calcolare una matrice ortogonale S e la sua inversa ${}^tS$ tali che ${}^tSAS$ sia una matrice diagonale.

La retta di riflessione è l'autospazio di A rispetto all'autovalore 1; dimostrare che questa retta forma un angolo $\alpha/2$ con l'asse della prima coordinata x_1 di $\mathbb{R}^2$. (Potrebbe essere utile la formula $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\mathrm{sen}\alpha}$.)

Per la matrice ortogonale S si può scegliere una rotazione (qual è langolo della rotazione?) oppure una riflessione (qual è langolo della retta di questa riflessione con l'asse delle prima coordinata?). Dare un'interpretazione geometrica in tutti e due i casi.

Esercizio 3.

1. Siano $f, g : V \to V$ due endomorfismi di uno spazio vettoriale V che commutano (cioè $f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di f. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subseteq \mathrm{Aut}_f(\lambda)$

2. Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario V di dimensione finita che commutano. Utilizzando il teorema sulla forma normale per automorfismi unitari, dimostrare che esiste una base ortonormale di V di autovettori communi di f e g (cioè, f e g sono diagonalizzabili simultaneamente).

Esercizio 4.

1. Per la matrice simmetrica reale
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
trovare gli autovalori e la forma normale diagonale di A; trovare poi una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS$ sia una matrice diagonale.

2. Per la matrice simmetrica reale
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
trovare gli autovalori e la forma normale diagonale di A; trovare poi una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo anti-autoaggiunto, cioè $\langle v, f(w)\rangle = -\langle f(v), w\rangle$ per tutti $v, w \in V$. Dimostrare che:

1. ogni autovalore di f è in $i\mathbb{R}$ (un numero puramente immaginario o 0);
2. autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;
3. la matrice di f rispetto a una base ortonormale di V è anti-hermitiana ($A = -{}^t\overline{A}$);
4. esiste una base ortonormale di autovettori di f.

Esercizio 6. Data la forma quadratica reale $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, scrivere q nella forma $q(x) = {}^t x A x$, con una matrice simmetrica A. Trovare una matrice ortogonale S e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale; quali sono gli assi principali di q? Come si scrive la forma quadratica q in nuove coordinate y, con $x = Sy$? Fare poi un disegno dell'sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : q(x) = 1\}$ nelle nuove coordinate y.