PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA - A.A. 2017/18

CORSI DI LAUREA IN INGEGNERIA NAVALE ED INDUSTRIALE

Trieste, 19/1/2018 *Prof. Dario Portelli*

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate

1.– Si dica se il seguente sistema di equazioni lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ è compatibile, e nel caso affermativo se ne determini l'insieme delle soluzioni:

$$\text{(SL)} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = 2\,. \end{cases}$$

i) Si determini la dimensione ed una base $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$ formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad (SL).

ii) Si completi $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

iii) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore ${}^{\mathbf{t}}[1\ 0\ 1]$. Si dica se la somma $U + W$ è diretta.

2.– Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base. Sia $f\colon V \to V$ l'applicazione lineare definita da:

$$(AL) \qquad f(v_1) = -v_1 + 2\,v_3 \qquad f(v_2) = v_1 + v_2 \qquad f(v_3) = v_1 \qquad f(v_4) = 3\,v_4$$

(i) Si spieghi perchè le (AL) definiscono un' applicazione lineare di dominio l' intero spazio vettoriale V.

(ii) Si scriva la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(iii) Si dica se f è diagonalizzabile.

3.– Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, tutta formata da autovettori dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da

$$f : \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} x - 3\,z \\ 0 \\ -3\,x + 9\,z \end{vmatrix} \qquad \text{per ogni} \quad \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

4.– Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$, dotato di un sistema di coordinate affini O, x, y, z, si considerino i punti $P\,(1, -1, 1)$ e $Q_a\,(2, 0, a)$, quest' ultimo dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

(i) Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$, si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta R_a di $\mathbb{A}^3$ passante per P e Q_a.

(ii) Per quali $a \in \mathbb{R}$ la retta R_a è parallela al piano S di equazione cartesiana $2x - y + 3z = 1$?