CORREZIONE DEL COMPITO DEL 19/1/2017

ESERCIZIO 1

$$(SL) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

È compatibile? $\quad (A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$

È evidente che le righe di A sono lin. indipendenti.
Dunque

$$\underline{2 = rg(A)} \leq rg(A|B) \leq 2 \Rightarrow rg(A) = rg(A|B)$$

ed $\underline{(SL) \text{ è compatibile}}$.

Si determini l'insieme delle soluzioni di (SL).
Applico ad $(A|B)$ l'algoritmo di eliminazione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

x_3 è parametro libero. Allora l'insieme delle soluzioni di (SL) è

$$\{(-7x_3 + 5,\ 5x_3 - 3,\ x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$rg(A) = 2 \Rightarrow \dim(W) = 3 - 2 = 1$

Il SLO associato ad (SL) è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 \quad + 7x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi una base $\mathcal{B}$ di W è formata dall'unico vettore $\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ad esempio $\quad \mathcal{C} = \left(e_1, e_2, \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$

È chiaro che $\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono lin. indipendenti, dunque $U \cap W = \{\underline{0}\}$ e pertanto $U + W$ è somma diretta.

ESERCIZIO 2

i) Le (AL) definiscono un'applicazione lineare $V \to V$ perché $(v_1, \dots, v_4)$ è una base di V, ed allora si può applicare il Teorema di determinazione di un'applicazione lineare.

ii) La matrice richiesta è data da

$$\begin{array}{cc} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{matrix} & \end{array}$$

NB. $f(v_4) = 3v_4$ mi dice che v_4 è autovettore per f, relativo all'autovalore 3.

iii) Si dica se f è diagonalizzabile

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)\left[\lambda(\lambda+1) - 2\right] =$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 + \lambda - 2)}_{=0} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Gli autovalori e le relative molt. algebriche sono

λ	$m_{alg}(\lambda)$
3	1
1	2
-2	1

Quindi per vedere se f è diagonalizzabile dobbiamo solo calcolare la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$

$$rg(A - I_4) = rg \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \implies \dim(A_1) = 4 - 3 = 1 = m_g(1) < 2 = m_{alg}(1)$$

sono proporzionali $\Rightarrow f$ non è diagon.

ESERCIZIO 3

$f = L_A$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ A è matrice simmetrica

ed allora una base come richiesto di $\mathbb{R}^3$ esiste per il Teorema Spettrale.

ESERCIZIO 4

Equazioni parametriche per la retta R_a:

$T(R_a)$ ha per base $\overrightarrow{PQ_a} = Q_a - P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a-1 \end{bmatrix}$. $P \in R_a$ e dunque

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t(a-1) \end{cases} \qquad t = x - 1 \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= -1 + x - 1 \\ z &= 1 + (x-1)(a-1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ (a-1)x - z = a - 2 \end{cases}$$ sono eq. cartesiane per R_a

La giacitura del piano S è l'insieme delle soluzioni di

$$2x - y + 3z = 0$$

Cerchiamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, il vettore $\overrightarrow{PQ_a}$ verifica tale relazione:

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3(a-1) = 0 \qquad 2 - 1 + 3a - 3 = 0$$

$$\boxed{a = \frac{2}{3}}$$