UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Corso di Laurea in Fisica

Corso di Laurea in Matematica

Programma del corso di GEOMETRIA I

a.a. 2017/18

Prof. Emilia Mezzetti – Prof. Mattia Mecchia

Gruppi, gruppi abeliani. Esempi di gruppi: insiemi numerici, gruppi di fuzioni, Z_n. Relazioni d'equivalenza, insieme quoziente Campi. I campi Z_p.

Spazi vettoriali su un campo K. Sottospazi vettoriali. Esempi: K^n, matrici mxn a coefficienti in K: M(mxn,K), C come R-spazio vettoriale, K[t] e suoi sottospazi. Intersezione e unione di sottospazi. Combinazioni lineari di vettori; sottospazio generato da un sottinsieme. Vettori linearmente dipendenti e indipendenti. Vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è combinazione lineare dei rimanenti. Sistemi di generatori. Basi di uno spazio vettoriale come sistemi di generatori linearmente indipendenti. Base canonica di K^n. Coordinate di un vettore rispetto a una base. Lemma dello scambio. Teorema di completamento a una base. Due basi finite hanno lo stesso numero di elementi. Dimensione. Da ogni sistema di generatori si può estrarre una base. Esistenza di una base per ogni spazio vettoriale (senza dim.) Dimensione di un sottospazio. Sottospazio somma. Relazione di Grassmann. Somma diretta. Sottospazi supplementari. Esistenza di un supplementare di un sottospazio.

Matrici, spazio delle righe e delle colonne. Matrici quadrate triangolari superiori e inferiori, matrici diagonali. Prodotto righe per colonne. Rango per righe e per colonne. Sistemi lineari di equazioni. Matrice dei coefficienti e matrice completa di un sistema lineare. Sistemi lineari equivalenti. Combinazioni lineari di equazioni. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Trasformazioni elementari su matrici. Matrici a gradini. Algoritmo di Gauss per trasformare una matrice mxn in una matrice a gradini. Applicazione alla risoluzione dei sistemi lineari. Sottospazi affini. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare compatibile. Variabili libere e variabili dipendenti.

Applicazioni lineari. Applicazione lineare L(A) associata a una matrice A. Immagine e controimmagine di un sottospazio in un'applicazione lineare. Sottospazio immagine. Nucleo. Teorema della dimensione. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali della stessa dimensione. Endomorfismi. Spazio vettoriale quoziente e sua dimensione. Rango per righe e per colonne coincidono. Inversa di un'applicazione lineare biiettiva. Isomorfismi. Spazi vettoriali isomorfi. Teorema di determinazione di un'applicazione lineare. Ogni K-spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a K^n, spazi vettoriali della stessa dimensione sono isomorfi.

Struttura di spazio vettoriale sull'insieme Hom(V,W) delle applicazioni lineari di V in W, spazio vettoriale duale, base duale. Spazio vettoriale biduale. Equazioni degli iperpiani. Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi fissate. Esistenza di base rispetto a cui la matrice ha forma canonica. Isomorfismo fra Hom(V,W) e Mat(nxm,K). Composta di applicazioni lineari è lineare. Matrice di una composta di applicazioni lineari.

Matrici invertibili. Caratterizzazione come matrici associate a isomorfismi, e come matrici quadrate di rango massimo. Il gruppo lineare $GL_n(K)$. Algoritmo per il calcolo dell'inversa.

Matrice di passaggio da una base B a una base B': come opera, come si costruisce. Matrice del cambiamento di base inverso è la matrice inversa. Relazione fra matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a coppie di basi diverse. Matrici simili, relazione di similitudine è una relazione d'equivalenza. Matrici congruenti.

Gruppi di permutazioni S_n. Cicli, trasposizioni, inversioni, ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti e di trasposizioni, segno di una permutazione. Gruppo alternante. Forme multilineari alternanti. Proprietà di antisimmetria. Determinante. Formula di Leibniz. Esistenza e unicità di una funzione determinante che vale 1 su una base fissata. Determinante di una matrice quadrata. Calcolo con il metodo di riduzione a forma triangolare. Teorema di Binet. Gruppo SL(n,K). Determinante della matrice inversa. Matrice aggiunta, espressione della matrice inversa. Sviluppo di Laplace di un determinante. Teorema di Cramer. Rango di una matrice come massimo ordine di un minore invertibile. Interpretazione del determinante come volume.

Autovettori e autovalori di un endomorfismo e di una matrice quadrata. Autospazi. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili. Un endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di autovettori. Polinomio caratteristico. Radici di un polinomio e loro moltepicità. Il caso complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).

Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore; quella algebrica è sempre maggiore o uguale a quella geometrica. Un endomorfismo su K è diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico ha tutte le radici in K, e per ogni autovalore le due molteplicità sono uguali. Endomorfismi e matrici quadrate triangolabili. Condizione necessaria e sufficiente per la triangolabilità.

Potenze di un endomorfismo, autospazi generalizzati. Blocchi di Jordan. Teorema di Jordan sulla forma normale di una matrice (senza dim.). Basi di Jordan. Metodo algoritmico per calcolare la forma normale di Jordan e una base di Jordan di una matrice trangolabile.

Forme bilineari simmetriche su spazi reali, e sesquilineari hermitiane su spazi complessi. Prodotti scalari, spazi euclidei e unitari. Matrici simmetriche e hermitiane. Matrici associate alle forme bilineari simmetriche o sesquilineari hermitiane. Norme. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma associata a un prodotto scalare. Definizione di angolo fra due vettori. Complemento ortogonale di un sottospazio. Basi ortonormali. Esistenza di una base ortonormale: algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Endomorfismi ortogonali e unitari. Proprietà di autovalori e autovettori degli endomorfismi ortogonali e unitari. Matrici ortogonali e unitarie. Matrici associate agli automorfismi ortogonali e unitari. Gruppo ortogonale e unitario. Rotazioni e riflessioni nel piano. Forma normale per endomorfismi ortogonali e unitari. Diagonalizzabilità di matrici unitarie. Forma normale per matrici ortogonali.

Endomorfismi autoaggiunti. Proprietà di autovalori e autovettori degli endomorfismi autoaggiunti. Matrici associate agli automorfismi autoaggiunti. Forma normale per endomorfismi autoaggiunti (teorema spettrale). Diagonalizzabilità per matrici simmetriche ed hermitiane. Calcolo degli assi principali per forme bilineari simmetriche. Forma normale per forme bilineari simmetriche e teorema di inerzia di Sylvester.

Testi consigliati

C. Ciliberto, Algebra Lineare. Bollati Boringhieri, 1994
E. Sernesi, Geometria 1. Bollati Boringhieri, 1989
P. Ellia, Appunti di Geometria 1. Pitagora Editrice, Bologna, 1997
G. Fischer, Lineare Algebra, vieweg studium, 1995

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

S. Lang, Linear Algebra. Addison-Wesley, 1966
F. Bottacin, Algebra lineare e geometria, Esculapio Bologna, 2016

Appunti delle lezioni dei prof. Mezzetti e Mecchia sono disponibili su Moodle:
https://moodle2.units.it/