SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DI CALCOLO COMBINATORIO

Esercizio 1. 10 caselle da colorare con tre colori: ho tre scelte per ogni casella, quindi uso le disposizioni con ripetizione. Ho $3^{10} = 59049$ diversi modi di colorare le caselle.

Esercizio 2. 10 caselle da colorare con 13 colori, ma ogni casella deve avere un colore diverso: ho 13 scelte per la prima, 12 per la seconda ecc., devo quindi usare le disposizioni semplici. $D_{10}^{13} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdots 5 \cdot 4 = 1037836800$.

Esercizio 3. 10 colori tra 13: qui non conta l'ordine di scelta, quindi uso le combinazioni. Ho $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$ diverse scelte.

Esercizio 4. 4 carte da un mazzo da 40. Anche qui non conta l'ordine di estrazione, quindi uso le combinazioni. Ho $\binom{40}{4} = 91390$ diverse estrazioni.

Esercizio 5. Le sequenze di testa e croce lunghe 5 sono tante quante le funzioni da $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\{T, C\}$. Uso le disposizioni con ripetizione e ho $2^5 = 32$ diverse sequenze.

Esercizio 6. 5 palline da un'urna contenente 90 palline numerate: è il gioco del lotto. Non conta l'ordine, quindi uso le combinazioni e ho $\binom{90}{5} = 43949268$ diverse estrazioni.

Esercizio 7. 4 carte da un mazzo da 40, ma non voglio carte di danari: è come se estraessi dal mazzo dopo aver tolto le 10 carte di danari. Ho $\binom{30}{4} = 27405$ diverse estrazioni possibili.

Esercizio 8. Deve essere presente almeno un re: significa esattamente un re, oppure due re, oppure tre, oppure quattro. Conviene sottrarre a tutte le possibili estrazioni quelle che non contengono nessun re. le estrazioni che non contengono nessun re sono ottenute da un mazzo con 36 carte, quindi $\binom{36}{4} = 58905$. Ho $\binom{40}{4} - \binom{36}{4} = 91390 - 58905 = 32485$.

Esercizio 9. Se due numeri sono fissati devo soltanto scegliere 3 numeri dai rimanenti 88. Quindi ho $\binom{88}{3} = 109736$ estrazioni.

Esercizio 10. Qui la domanda è un po' ambigua. Sarà più chiara quando verrà introdotta la variabile aleatoria ipergeometrica. Comunque conviene ragionare come se le palline bianche fossero numerate da 1 a 10 e le rosse da 11 a 15. Si chiede quante siano le estrazioni di 5 palline in cui due abbiano numeri inferiori o uguali a 10 e tre abbiano numeri superiori o uguali a 11. Quindi ho $\binom{10}{2}$ scelte per le palline bianche e $\binom{5}{3}$ per le palline rosse. In conclusione $\binom{10}{2} \cdot \binom{5}{3} = 45 \cdot 10 = 450$ estrazioni.

Esercizio 11. Se non ci sono vincoli (prima domanda) devo scegliere 5 caselle da 25, ma siccome le pedine sono tutte uguali non conta l'ordine di scelta. Ho $\binom{25}{5} = 53130$

possibilità. Se voglio una pedina per riga e una per colonna ho 5 scelte per la pedina sulla prima riga, 4 per quella sulla seconda, 3 per la pedina sulla terza riga, 2 per le pedina sulla quarta e una scelta obbligata per l'ultima, quindi ho $5! = 120$ scelte. Se le pedine sono tre rosse e due bianche (terza domanda) ragiono così: prima fisso i posti sulla scacchiera e quindi il problema è già risolto delle prime due domande, poi fissati i posti metto le pedine colorate in modo diverso. Quindi fissati i posti ho $\binom{5}{3}$ scelte diverse di disporre le rosse e poi le bianche sono obbligate. Quindi ho 531300 possibilità nel primo caso e 1200 nel secondo.

Esercizio 12. I punti sono a tre a tre non allineati, quindi le rette sono individuate dalle coppie di punti. Devo scegliere 2 punti da 6. Quindi ho $\binom{6}{2} = 15$ scelte.

Esercizio 13. I numeri di 7 cifre che si scrivono usando solo le cifre 1 e 2 sono $2^7 = 128$. Quelli in cui compaiono esattamente quattro 1 e tre 2 sono $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$.

Esercizio 14. La prima domanda è semplice: ho 4 scelte per il primo professore, 4 per il secondo ecc. Quindi ho $4^8 = 65536$ assegnazioni. La seconda domanda è invece più complicata. Mi pare che il modo più semplice per risolvere sia utilizzare il principio di inclusione-esclusione. Chiamiamo A_1 l'insieme delle assegnazioni che lasciano vuota la prima scuola, A_2 l'insieme delle assegnazioni che lasciano vuota la seconda scuola e A_3 e A_4 gli altri analoghi insiemi di assegnazioni. L'insieme di cui dobbiamo determinare la numerosità è quindi il complementare di $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}$$

Ora, per i, j e k tra loro diversi, abbiamo

$$\begin{aligned}
&|A_i| = 3^8, \\
&|A_i \cap A_j| = 2^8, \\
&|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1, \\
&|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.
\end{aligned}$$

Quindi, detto B l'insieme di tutte le possibili assegnazioni, si ha

$$|B \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = 4^8 - (4 \cdot 3^8 - 6 \cdot 2^8 + 4) = 40824.$$