SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DI PROBABILITÀ ELEMENTARE

Esercizio 1. *Si scelgono 3 numeri da 1 a 90.*
i) Qual è la probabilità che tali 3 numeri siano presenti in una estrazione di 5 numeri?

Casi possibili $\binom{90}{5}$. Casi favorevoli $\binom{87}{2}$. Probabilità $\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} \approx 8,51 \cdot 10^{-5}$.

Potevo usare anche la v.a. ipergeometrica con $b = 3$, $r = 87$, $k = 5$ e $i = 3$, quindi

$$P(X = i) = \frac{\binom{b}{i}\binom{r}{k-i}}{\binom{b+r}{k}} = \frac{\binom{3}{3}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}.$$

ii) Qual è la probabilità che almeno 2 di tali 3 numeri siano presenti in una estrazione di 5 numeri?

La probabilità che esattamente 3 numeri siano presenti è data al punto precedente. La probabilità che esattamente 2 numeri siano presenti è data da

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{87}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 7,23 \cdot 10^{-3}.$$

Quindi $P \approx 0,00723 + 0,00008 = 0,00731$.

iii) Se i numeri scelti sono 4, qual è la probabilità che esattamente 2 di tali 4 numeri siano presenti in almeno una tra 10 estrazioni di 5 numeri?

La probabilità che esattamente 2 di tali 4 numeri siano presenti in una estrazione è

$$b = 4,\ r = 86,\ k = 5,\ i = 2, \qquad P = P(X = i) = \frac{\binom{b}{i}\binom{r}{k-i}}{\binom{b+r}{k}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{86}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0.0139.$$

La probabilità che ciò non avvenga è quindi $1 - P$. La probabilità che ciò non avvenga in tutte le 10 estrazioni è quindi $(1 - P)^{10}$. La probabilità che ciò avvenga in almeno una sulle 10 estrazioni è quindi $1 - (1 - P)^{10} \approx 1 - (1 - 0,0139)^{10} \approx 0,131$.

Esercizio 2. *Un'urna contiene 5 palline bianche e 7 palline nere.*
i) Estraggo 3 palline contemporaneamente. Qual è la probabilità che siano tutte dello stesso colore?

A_1 sia l'evento "estrazione di tre bianche", A_2 sia l'evento "estrazione di tre nere". Si ha

$$P(A_1) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,045, \qquad P(A_1) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} \approx 0,159.$$

e quindi, essendo A_1 e A_2 disgiunti si ottiene $P \approx 0,204$.

ii) Estraggo una pallina, ne controllo il colore e la rimetto nell'urna. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che sia dello stesso colore della prima pallina?

Siano gli eventi

- $A_1 =$ "la prima pallina estratta è bianca",
- $A_2 =$ "la prima pallina estratta è nera",
- $B_1 =$ "la seconda pallina estratta è bianca",
- $B_2 =$ "la seconda pallina estratta è nera".

Gli eventi A_i sono indipendenti dagli eventi B_j per qualunque valore di i e j. Si ha

$$P(A_1) = P(B_1) = \frac{5}{12}, \qquad P(A_2) = P(B_2) = \frac{7}{12}$$

e

$$P(B_1|A_1) = P(B_1), \qquad P(B_2|A_2) = P(B_2).$$

Quindi

$$P(A_1 \cap B_1) = P(B_1|A_1)P(A_1) = P(B_1)P(A_1) = \frac{25}{144},$$
$$P(A_2 \cap B_2) = P(B_2|A_2)P(A_2) = P(B_2)P(A_2) = \frac{49}{144}.$$

Da cui $P = 74/144 \approx 0,51$.

iii) Estraggo una pallina, non ne controllo il colore e non la rimetto nell'urna. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

Siano gli eventi come nel punto precedente. Ora non sono più indipendenti. Si ha

$$P(A_1) = \frac{5}{12}, \quad P(A_2) = \frac{7}{12}, \quad P(B_1|A_1) = \frac{4}{11}, \quad P(B_1|A_2) = \frac{5}{11}.$$

Uso la formula delle alternative

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) \\ &= \tfrac{55}{132} \approx 0,41. \end{aligned}$$

iv) Estraggo una pallina, vedo che è bianca e non la rimetto nell'urna. Estraggo una seconda pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

Con le notazioni del punto precedente si tratta di $P(B_1|A_1)$. Quindi è $4/11$.

Esercizio 3. *Sono date 10 urne numerate da* 1 *a* 10 *tali che l'urna i-esima contenga i palline bianche e $10 - i$ palline nere.*

i) Da un'urna scelta a caso estraggo una pallina. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

Siano gli eventi $A_i =$ "l'urna scelta è la $i-$esima", $B =$ "la pallina estratta è bianca ". Si ha

$$P(B|A_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A_i) = \frac{1}{10},$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{i}{100} = \frac{55}{100}$$

(si ricordi che $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$).

ii) Da un'urna scelta a caso estraggo contemporaneamente due palline che risultano essere nere. Qual è la probabilità che l'urna scelta sia la n. 1?

Sia l'evento $C =$ "si estraggono due palline nere". Si ha

$$P(C|A_{10}) = 0, \quad P(C|A_9) = 0, \quad P(C|A_i) = \frac{\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}}, \quad \text{per } i = 1, \dots 8.$$

Quindi

$$P(C) = \sum_{i=1}^{10} P(C|A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{8} \frac{\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10},$$

e finalmente

$$P(A_1|C) = \frac{P(C|A_1) \cdot P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10}}{\sum_{i=1}^{8} \frac{\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\binom{9}{2}}{\sum_{i=1}^{8} \binom{10-i}{2}}.$$

iii) Da un'urna scelta a caso estraggo contemporaneamente due palline che risultano una bianca e una nera. Qual è l'urna che darebbe la massima probabilità di essere stata scelta?

Sia l'evento $D =$ "si estraggono una pallina bianca e una nera". Si ha

$$P(D|A_{10}) = 0, \qquad P(D|A_i) = \frac{(10-i)i}{\binom{10}{2}}, \quad \text{for } i = 1, \dots 9.$$

Si vede facilmente che il massimo di $(10-i)i$ è raggiunto per $i = 5$, quindi la probabilità condizionale è massima per $i = 5$.

Esercizio 4. *Sono date 3 urne tali che una contiene 2 palline bianche, una contiene 2 palline nere e la terza una pallina bianca e una pallina nera.*

i) Da un'urna estraggo una pallina bianca. Qual è la probabilità che anche l'altra pallina della stessa urna sia bianca?

Siano gli eventi

- $A_1 =$ "l'urna scelta è la prima",
- $A_2 =$ "l'urna scelta è la seconda",
- $A_3 =$ "l'urna scelta è la terza",
- $B =$ "si estrae una pallina bianca".

Si ha

$$P(B|A_1) = 1, \qquad P(A_1) = \frac{1}{3},$$

$$P(B|A_2) = 0, \qquad P(A_2) = \frac{1}{3},$$

$$P(B|A_3) = \frac{1}{2}, \qquad P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Quindi

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

e finalmente

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

ii) Da un'urna estraggo una pallina nera. Cambio urna e estraggo un'altra pallina. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca?

Sia l'evento $C =$"dall'urna scelta la prima volta si estrae una pallina nera". Si ha

$$P(A_1|C) = 0, \qquad P(A_2|C) = \frac{2}{3}, \qquad P(A_3|C) = \frac{1}{3},.$$

Dopo aver cambiato urna ho quindi 2/3 di probabilità di aver scartato la seconda urna e 1/3 di probabilità di aver scartato la terza urna. Quindi se ho scartato la seconda urna mi rimangono la prima e la terza e ho 3/4 di probabilità di pescare una bianca, mentre se ho scartato la terza urna mi rimane 1/2 di probabilità di pescare una pallina bianca. Quindi la probabilità finale è

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$