SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE VARIABILI ALEATORIE DISCRETE 1

Esercizio 1. *Si lanciano un dado equilibrato a sei facce e una moneta equilibrata. Se esce testa e il valore del dado è pari oppure croce e il valore del dado è dispari si tiene il valore del dado, se esce testa e dispari si moltiplica il valore del dado per 2, se esce croce e pari si divide il valore del dado per 2.*
i) Si determini la densità della variabile aleatoria X: punteggio finale.

Indicati con n e T oppure C rispettivamente l'esito del dado e l'esito del lancio della moneta, consideriamo la funzione $f(n,T)$ ovvero $f(n,C)$ il punteggio finale secondo le regole specificate. Si ha

$$\begin{aligned}
&f(1,T)=2; \quad f(2,T)=2; \quad f(3,T)=6;\\
&f(4,T)=4; \quad f(5,T)=10; \quad f(6,T)=6;\\
&f(1,C)=1; \quad f(2,C)=1; \quad f(3,C)=3;\\
&f(4,C)=2; \quad f(5,C)=5; \quad f(6,C)=3.
\end{aligned}$$

Ogni esito ha probabilità $1/12$, quindi otteniamo la densità

$$p(1)=\tfrac{1}{6}; \quad p(2)=\tfrac{1}{4}; \quad p(3)=\tfrac{1}{6}; \quad p(4)=\tfrac{1}{12};$$
$$p(5)=\tfrac{1}{12}; \quad p(6)=\tfrac{1}{6}; \quad p(10)=\tfrac{1}{12}.$$

ii) Si calcoli la media e la varianza di X.

Qui non c'è altra possibilità che fare il calcolo diretto:

$$E[X]=\sum_i i\cdot p(i)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{12}+6\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{12}=\frac{15}{4},$$

$$E[X^2]=\sum_i i^2\cdot p(i)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{12}+25\cdot\frac{1}{12}+36\cdot\frac{1}{6}+100\cdot\frac{1}{12}=\frac{245}{12},$$

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{305}{48}.$$

iii) In 5 lanci qual è la probabilità di ottenere 6 per tre volte? Qual è la probabilità di ottenere 10 almeno una volta?

$$P(\text{“ottenere 6 per tre volte in 5 lanci”})=\binom{5}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^2\approx 0,0321,$$

$$P(\text{“ottenere 10 almeno una volta in 5 lanci”}) = 1 - (\frac{11}{12})^5 \approx 0,35.$$

Esercizio 2. *Si lanciano in modo indipendente due dadi equilibrati a sei facce. Siano X e Y rispettivamente le variabili aleatorie punteggio del primo e del secondo dado.*
i) Si determinino le densità delle variabili aleatorie $Z = XY$ e $W = X - Y$.

Si ottiene

$$\begin{array}{llll}
p_Z(1) = \frac{1}{36}; & p_Z(2) = \frac{1}{18}; & p_Z(3) = \frac{1}{18}; & p_Z(4) = \frac{1}{12}; \\
p_Z(5) = \frac{1}{18}; & p_Z(6) = \frac{1}{9}; & p_Z(8) = \frac{1}{18}; & p_Z(9) = \frac{1}{36}; \\
p_Z(10) = \frac{1}{18}; & p_Z(12) = \frac{1}{9}; & p_Z(15) = \frac{1}{18}; & p_Z(16) = \frac{1}{36}; \\
p_Z(18) = \frac{1}{18}; & p_Z(20) = \frac{1}{18}; & p_Z(24) = \frac{1}{18}; & p_Z(25) = \frac{1}{36}; \\
p_Z(30) = \frac{1}{18}; & p_Z(36) = \frac{1}{36}. & &
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{llll}
p_W(-5) = \frac{1}{36}; & p_W(-4) = \frac{1}{18}; & p_W(-3) = \frac{1}{12}; & p_W(-2) = \frac{1}{9}; \\
p_W(-1) = \frac{5}{36}; & p_W(0) = \frac{1}{6}; & p_W(1) = \frac{5}{36}; & p_W(2) = \frac{1}{9}; \\
p_W(3) = \frac{1}{12}; & p_W(4) = \frac{1}{18}; & p_W(5) = \frac{1}{36}. &
\end{array}$$

ii) Si calcoli media e varianza di X, Y, Z, W.

Si ottiene

$$E[X] = E[Y] = \frac{7}{2}, \quad E[Z] = E[X] \cdot E[Y] = \frac{49}{4}, \quad E[W] = E[X] - E[Y] = 0.$$

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{35}{12}, \quad Var(Z) = \dots, \quad Var(W) = 2\,Var(X) = \frac{35}{6}.$$

iii) Si dica se Z e W sono indipendenti.

Scelgo come eventi $\{Z = XY = 1\}$ e $\{W = X - Y = 0\}$. Ho che $\{Z = 1\} \cap \{W = 0\} = \{X = 1, Y = 1\}$. Ma

$$P(\{X = 1, Y = 1\}) = \frac{1}{36} \quad \text{e} \quad P(\{Z = 1\}) \cdot P(\{W = 0\}) = \frac{1}{216},$$

quindi Z e W non sono indipendenti.

Esercizio 3. *Un'urna contiene 10 palline bianche, 8 palline nere e 6 palline rosse. Vengono estratte 5 palline senza reinbussolamento. Sia X la variabile aleatoria numero di palline bianche e e Y la variabile aleatoria numero di palline nere.*
i) Si determini la densità, la media e la varianza di $Z = X - Y$.

Per determinare la media di Z ragiono in questo modo: intanto osservo che X è una variabile aleatoria ipergeometrica, infatti posso considerare le palline nere e rosse come se fossero indistintamente palline “non bianche ”. Ho

$$P_X(i) = \frac{\binom{10}{i}\binom{14}{5-j}}{\binom{24}{5}}.$$

Analogamente per la Y ho

$$P_Y(j) = \frac{\binom{8}{j}\binom{16}{5-j}}{\binom{24}{5}}.$$

Quindi

$$E[X] = \frac{25}{12}, \quad E[Y] = \frac{5}{3}, \quad E[Z] = E[X] - E[Y] = \frac{5}{12}.$$

Per determinare invece la densità e la varianza, le cose sono più complicate. Indico con i il numero di palline estratte bianche, con j il numero di palline estratte nere. Ho il vincolo che $i + j \leq 5$. Indico con $p(i, j)$ la probabilità che nell'estrazione vi siano i palline bianche, j palline nere e di conseguenza $5 - i - j$ palline rosse. Ottengo

$$p(i,j) = \frac{\binom{10}{i}\binom{8}{j}\binom{6}{5-i-j}}{\binom{24}{5}}.$$

Metto in tabella i dati

j						
5	$\frac{\binom{8}{5}}{\binom{24}{5}}$					
4	$\frac{\binom{8}{4}\binom{6}{1}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{8}{4}}{\binom{24}{5}}$				
3	$\frac{\binom{8}{3}\binom{6}{2}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{8}{3}\binom{6}{1}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{8}{3}}{\binom{24}{5}}$			
2	$\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{3}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{8}{2}\binom{6}{2}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{1}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{3}\binom{8}{2}}{\binom{24}{5}}$		
1	$\frac{\binom{8}{1}\binom{6}{4}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{8}{1}\binom{6}{3}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{8}{1}\binom{6}{2}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{3}\binom{8}{1}\binom{6}{1}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{4}\binom{8}{1}}{\binom{24}{5}}$	
0	$\frac{\binom{6}{5}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{6}{4}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{6}{3}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{3}\binom{6}{2}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{4}\binom{6}{1}}{\binom{24}{5}}$	$\frac{\binom{10}{5}}{\binom{24}{5}}$
	0	1	2	3	4	5 i

Si usa la tabella per calcolare la densità: per esempio

$$p_Z(0) = p(0,0) + p(1,1) + p(2,2) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{24}{5}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{8}{1}\binom{6}{3}}{\binom{24}{5}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{1}}{\binom{24}{5}}$$

e così via. Trovata la densità si calcola la varianza.

ii) Si dica se X e Y sono indipendenti.

Dalla tabella del punto precedente si vede immediatamente che non sono indipendenti.

iii) Stesse domande nel caso in cui a ogni estrazione le palline vengono reimmesse nell'urna.

Si ha

$$X = B(5, \frac{5}{12}), \qquad Y = B(5, \frac{1}{3}).$$

Quindi, come prima,

$$E[X] = \frac{25}{12}, \quad E[Y] = \frac{5}{3}, \quad E[Z] = E[X] - E[Y] = \frac{5}{12}.$$

Invece in questo caso, sempre con il vincolo $i + j \leq 5$,

$$p(i,j) = \binom{5}{i}\binom{5-i}{j}(\frac{5}{12})^i(\frac{1}{3})^j(\frac{1}{4})^{5-i-j}.$$

Si costruisce una tabella analoga alla precedente. Anche in questo caso le Variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 4. *Si effettuano quattro lanci indipendenti di una moneta che ha la probabilità $\frac{1}{3}$ di ottenere testa a ogni lancio*

i) Calcolare la probabilità di ottenere testa per tre volte.

Si ha che $X = B(4, \frac{1}{3})$. Quindi $p_X(3) = \binom{4}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3}) = \frac{8}{81} \approx 0,098$.

ii) Calcolare la probabilità di ottenere testa almeno una volta.

$P = 1 - (\frac{2}{3})^4 \approx 0,802$.

iii) Calcolare la probabilità di ottenere testa al primo lancio o croce al terzo lancio.

Poniamo gli eventi A "ottenere testa al primo lancio" e B "ottenere croce al terzo lancio". Si ha

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{9},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

iv) Calcolare $E[S-T]$ e $Var(S+2T)$ dove S e T indicano rispettivamente il numero delle teste e delle croci ottenute.

Abbiamo $S = B(4, \frac{1}{3})$ e $T = B(4, \frac{2}{3})$. Non sono indipendenti, anzi $T = 4 - S$. Si ha

$$E[S-T] = E[S] - E[T] = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.$$

$$Var(S + 2T) = Var(8 - S) = Var(8) + Var(S) = \frac{8}{9}.$$

Esercizio 5. *Siano X, Y e Z variabili aleatorie indipendenti, e prime due con legge di Bernoulli di parametro $\frac{2}{3}$ e la terza con legge di Bernoulli di parametro $\frac{1}{4}$.*

i) Calcolare $E[YZ]$ e $Var(3X-2Y)$.

Si ha $X,\ Y = B(4, \frac{2}{3})$, $Z = B(4, \frac{1}{4})$. Quindi

$$E[YZ] = E[Y] \cdot E[Z] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}, \quad Var(3X-.2Y) = 9\,Var(X) + 4\,Var(Y) = \frac{26}{9}.$$

ii) Calcolare $P(\{Z > \frac{1}{3}\})$.

$$P(\{Z > \frac{1}{3}\}) = P(\{Z = 1\}) = \frac{1}{4}.$$

iii) Determinare la densità della variabile aleatoria $T = X + Y$. La variabile aleatoria $X+Y$ è una $B(2, \frac{2}{3})$, quindi

$$p(0) = \frac{1}{9}, \quad p(1) = \frac{4}{9}, \quad p(2) = \frac{4}{9}.$$

iv) Calcolare $E[T^2]$.

Si ha

$$p_{T^2}(0) = \frac{1}{9}, \quad p_{T^2}(1) = \frac{4}{9}, \quad p_{T^2}(4) = \frac{4}{9},$$

quindi

$$E[T^2] = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}.$$