MODELLO DI SOPRAVVIVENZA DISCRETO

Sia

T n.a. non negativo che esprime la durata aleatoria da un istante iniziale fino al verificarsi di un determinato evento

Si indica con 0 l'istante iniziale

T ha determinazioni: $0 < t_1 < t_2 < \cdots$

Esempi:

- osservazioni di durate con misurazioni arrotondate
- osservazioni di durate raggruppate in intervalli (si considera come durata il punto medio di ciascun intervallo)
- durate misurate con un numero intero di unità (per esempio, durate misurate in settimane)

Si definiscono le

probabilità $q_j = P(T = t_j),\qquad j = 1, 2, \cdots$

essendo $\sum_{j=1}^{+\infty} q_j = 1$

Si definisce

Funzione di sopravvivenza $S(t) = P(T > t) = \sum_{t_j > t} q_j\,,\qquad t \geq 0$

Si ha

- $S(t)$ è una funzione non crescente, continua a destra; infatti, se $t_k \leq t < t_{k+1}$ si ha

$$S(t) = P(T > t) = \sum_{j > k} q_j = S(t_k)$$

- per assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T è equivalente assegnare le probabilità oppure la funzione di sopravvivenza

Si definisce

Funzione di rischio o hazard function $\lambda(t_j) = P(T = t_j | T \geq t_j), \qquad j = 1, 2, \cdots$

Si ha

$$\lambda(t_j) = \frac{q_j}{S(t_{j-1})}, \qquad j = 1, 2, \cdots$$

essendo

$t_0 = 0$ e $S(t_0) = 1$

Si ha allora che, assegnate le probabilità, è assegnata la funzione di sopravvivenza ed è pure assegnata la funzione di rischio

Poiché $q_j = S(t_{j-1}) - S(t_j)$ si ha

$$\lambda(t_j) = \frac{q_j}{S(t_{j-1})} = \frac{S(t_{j-1}) - S(t_j)}{S(t_{j-1})} = 1 - \frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})}, \qquad j = 1, 2, \cdots$$

Proviamo che assegnata la funzione di rischio risulta assegnata anche la funzione di sopravvivenza.

Sia $t_k \leq t < t_{k+1}$ si ha

$$S(\mathrm{t}) = \mathrm{S}(t_k) = \frac{\mathrm{S}(t_k)}{\mathrm{S}(t_{k-1})} \cdot \frac{\mathrm{S}(t_{k-1})}{\mathrm{S}(t_{k-2})} \cdot \cdots \cdot \frac{\mathrm{S}(t_1)}{\mathrm{S}(t_0)}$$

Essendo $\frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} = 1 - \lambda(t_j)$, $j = 1, 2, \cdots$ si ottiene

$$S(\mathrm{t}) = \mathrm{S}(t_k) = \left(1 - \lambda(t_k)\right) \cdot \left(1 - \lambda(t_{k-1})\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \lambda(t_1)\right) = \prod_{t_j \leq t} \left(1 - \lambda(t_j)\right)$$

È equivalente assegnare la distribuzione di probabilità del n.a. T assegnando la funzione di sopravvivenza oppure la funzione di rischio.

<u>Osservazione</u>: interpretazione del significato di $$\frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} = 1 - \lambda(t_j)$$

Si ha

$$\frac{S(t_j)}{S(t_{j-1})} = \frac{P(T > t_j)}{P(T > t_{j-1})} = \frac{P(T > t_{j-1}, T > t_j)}{P(T > t_{j-1})} = P(T > t_j \mid T > t_{j-1})$$

Si può allora interpretare la formula

$$S(t) = S(t_k) = \prod_{t_j \leq t} (1 - \lambda(t_j)) = \prod_{t_j \leq t} P(T > t_j \mid T > t_{j-1})$$

come prodotto di probabilità condizionate di sopravvivenza.