ASSEGNAZIONE STOCASTICA

SU RETI NON CONGESTIONATE SNL

(Stochastic Network Loading)

algoritmo di DIAL

Ipotesi:

1. La scelta del percorso è basata sul modello LOGIT
2. Si considerano solamente “percorsi efficienti”

Percorsi efficienti

Per percorsi efficienti si intendono percorsi che si allontanano dall'origine, per ciascun arco dei quali vale la relazione:

$$\text{arco } (i,j) \in \text{ percorso efficiente} \qquad \text{se} \quad c_i < c_j$$

Probabilità di scelta del percorso

L'algoritmo si basa su una manipolazione matematica che parte dall'utilizzo classico del modello Logit ai possibili percorsi alternativi fra una coppia od

La probabilità di scelta del percorso k è pari a:

$$p_{k,od} = \frac{e^{-C_k/\theta}}{\sum_{h \in I_{od}} e^{-C_h/\theta}}$$

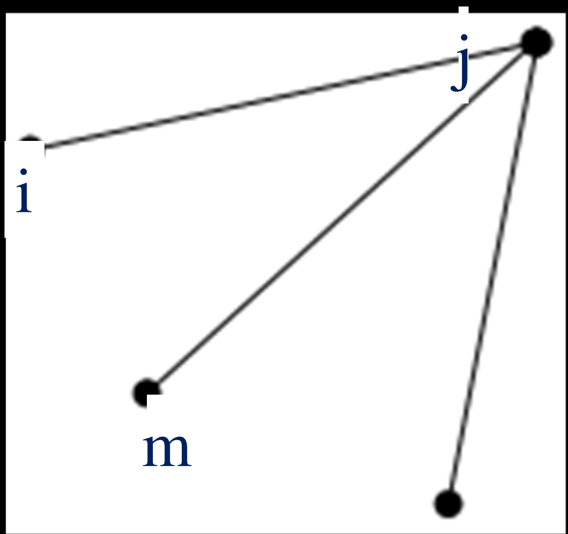
Probabilità di utilizzo di un arco

la probabilità assoluta di utilizzare un generico arco (i,j) è data dalla somma delle probabilità di utilizzare percorsi che contengono l'arco stesso

$$p(i,j) = \sum_{k \in I(i,j)} \frac{e^{-C_k/\theta}}{\sum_{h \in I_{od}} e^{-C_h/\theta}}$$

Probabilità condizionata

Per il nodo terminale j dell'arco (i,j) possiamo calcolare la probabilità p(i,j/j) di usare l'arco (i,j) condizionata al passaggio per il nodo j



$$p(i,j/j) = \frac{p(i,j)}{\sum_{m \in BS_j} p(m,j)}$$

manopolazione 2

Sostituendo le prob.condizionate

$$p(i,j/j)=\sum_{k\in I(i,j)}\frac{e^{-C_k/\theta}}{\sum_{h\in I_{od}}e^{-C_h/\theta}}\cdot\frac{1}{\sum_{m\in BS_j}\sum_{l\in I(m,j)}\frac{e^{-C_l/\theta}}{\sum_{h\in I_{od}}e^{-C_h/\theta}}}$$

semplificazione

si può semplificare la sommatoria a denominatore ottenendo:

$$p(i, j / j) = \frac{\sum\limits_{k \in I(i,j)} e^{-C_k / \theta}}{\sum\limits_{m \in BS_j} \sum\limits_{l \in I(m,j)} e^{-C_l / \theta}}$$

Il costo del generico percorso k può essere espresso come somma di tre termini: il costo del tratto per raggiungere l'arco (i,j), il costo dell'arco (i,j) e il costo del tratto tra (i,j) e la destinazione

$$C_k = C_{k,(i,j)} + c_{i,j} + C_{(i,j),k}$$

- Sostituendo:

$$p(i,j/j)=\frac{\sum_{k\in I(i,j)} e^{-C_{k,(i,j)}/\theta}\cdot e^{-c_{i,j}/\theta}\cdot e^{-C_{(i,j),k}/\theta}}{\sum_{m\in BS_j}\sum_{l\in I(m,j)} e^{-C_{l,(m,j)}/\theta}\cdot e^{-c_{m,j}/\theta}\cdot e^{-C_{(m,j),l}/\theta}}$$

- Indichiamo con A(i) l’insieme delle parti di percorso k$\in$I(i,j) che precedono i e con B(j) quelle che seguono j.
-
- L’insieme dei percorsi I(i,j) che contiene l’arco (i,j) si ottiene dalla combinazione di tutti gli elementi di A(i) con tutti gli elementi di B(j), per cui l’espressione della probabilità può essere riscritta nella forma:

$$p(i,j/j)=\frac{e^{-c_{i,j}/\theta}\cdot\sum_{a(i)\in A(i)}e^{-C_{a(i)}/\theta}\cdot\sum_{b(j)\in B(j)}e^{-C_{b(j)}/\theta}}{\sum_{m\in BS_j}e^{-c_{m,j}/\theta}\cdot\sum_{a(m)\in A(m)}e^{-C_{a(m)}/\theta}\cdot\sum_{b(j)\in B(j)}e^{-C_{b(j)}/\theta}}$$

- Semplificando:

$$p(i,j/j)=\frac{e^{-c_{i,j}/\theta}\cdot\sum_{a(i)\in A(i)}e^{-C_{a(i)}/\theta}}{\sum_{m\in BS_j}e^{-c_{m,j}/\theta}\cdot\sum_{a(m)\in A(m)}e^{-C_{a(m)}/\theta}}$$

Peso dell'arco

Definendo il peso dell'arco

$$w_{i,j} = e^{-c_{i,j}/\theta} \cdot \sum_{a(i)\in A(i)} e^{-C_{a(i)}/\theta}$$

E sostituendo:

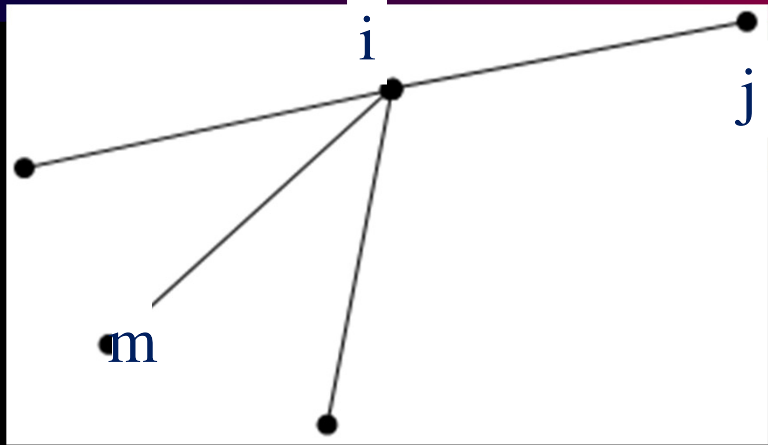
$$p(i,j/j) = \frac{w_{i,j}}{\sum_{m\in BS_j} w_{m,j}}$$

Relazione ricorsiva

E' possibile definire una relazione ricorsiva tra i pesi d'arco, considerando gli archi entranti nel nodo i.

I costi del primo tratto di percorso dall'origine a i può essere scomposto nella parte fino ad m ed in quella (m,i

$$C_{a(i)} = C_{a(m)} + c_{m,i}$$



Per cui l’espressione:

$$w_{i,j} = e^{-c_{i,j}/\theta} \cdot \sum_{a(i)\in A(i)} e^{-C_{a(i)}/\theta}$$

Criterio a volume-densità

può essere scritta anche come

$$w_{i,j} = e^{-c_{i,j}/\theta} \cdot \sum_{m \in BS(i)} \sum_{a(m) \in A(m)} e^{-C_{a(m)}/\theta} \cdot e^{-c_{m,i}/\theta}$$

ovvero

$$\boxed{w_{i,j} = e^{-c_{i,j}/\theta} \cdot \sum_{m \in BS(i)} w_{m,i}}$$

Relazioni tra i flussi

Passando ai flussi, quello complessivo sull'arco (i,j) per la relazione (o,d) sarà dato dalla somma dei flussi dei percorsi che passano per l'arco (i,j):

$$f_{i,j} = d_{od} \cdot \sum_{k \in I_{i,j}} p_{k,od} = d_{od} \cdot p(i,j)$$

Il flusso che entra nel nodo terminale j dell'arco (i,j) sarà dato dalla somma dei flussi sugli archi entranti in j e cioè:

$$f_j = \sum_{m \in BS(j)} f_{m,j} = d_{od} \cdot \sum_{m \in BS(j)} p(m,j)$$

Se consideriamo il prodotto:

$$f_j \cdot p(i,j/j) = d_{od} \cdot \sum_{m \in BS(j)} p(m,j) \cdot \frac{p(i,j)}{\sum_{m \in BS(j)} p(m,j)} = d_{od} \cdot p(i,j) = f_{i,j}$$

si ottiene il flusso d'arco a partire dal flusso di nodo

$$f_{i,j} = f_j \cdot \frac{w_{i,j}}{\sum_{m \in BS(j)} w_{m,j}}$$

Algoritmo

Inizializzazione

- Si determina l'albero di costo minimo a partire dall'origine o (ad es. Dijkstra);
- Si conserva l'ordinamento dei nodi per costi crescenti;
- Si azzerano i pesi ed i flussi degli archi:

$$w_{i,j} = 0$$
$$f_{i,j} = 0$$

Passo 1

- Passo 1 (calcolo dei pesi d'arco)

  Per ogni nodo i, in ordine crescente di costo, si calcola:

$$w_{i,j} = e^{-c_{i,j}/\theta} \cdot \sum_{m \in BS(i)} w_{m,i}$$

Se uno degli archi nella stella BS, ad esempio (l,i) ha peso nullo significa che esso <u>non appartiene ad un percorso efficiente</u> (non essendo stato ancora considerato, il costo del suo nodo origine l deve essere superiore a quello del nodo i

Passo 2

- Passo 2 (calcolo delle probabilità condizionate)
  - Per ogni arco (i,j) si calcola

$$p(i,j/j) = \frac{w_{i,j}}{\sum_{m \in BS(j)} w_{m,j}}$$

Flussi di nodo

- Passo 3 (calcolo dei flussi d'arco)
- Si esplorano i nodi in ordine decrescente di costo, partendo dal più lontano e si calcola il flusso con le relazioni

per i nodi non centroidi

$$f_i = \sum_{m \in FS(i)} f_{i,j}$$

per i nodi centroidi

$$f_i = \sum_{m \in FS(i)} f_{i,j} + d_{o,i}$$

Flussi d'arco

- Sulla base del flusso di nodo si calcolano i flussi sugli archi entranti:

$$f_{m,i} = f_i \cdot p(m,i/i)$$

- si procede fino al raggiungimento del nodo radice
-

- Il procedimento va ripetuto per tutte le origini, incrementando alla fine di ogni iterazione i valori dei flussi d’arco in apposito vettore distinto da quello utilizzato per il calcolo dei flussi d’arco nel corso di un’iterazione.