ESERCIZIO 1

$$\det\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&1&0&0&-1\end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-1&-1\\0&-1&-2&-1\\0&-1&-1&-2\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{bmatrix} =$$

$$= -(-1)^3\det\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$ finisco con Sarrus

$$\det\left[\begin{array}{ccc|cc}2&1&1&2&1\\1&2&1&1&2\\1&1&2&1&1\end{array}\right] = 8+1+1-2-2-2 = \underline{\underline{4}}$$

$\boxed{n=4}$

$$\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix} = 1$$

$R_4 \longrightarrow R_4 - R_3$

$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$

$\boxed{n=5}$

$$\det\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&2&2\\1&2&3&3&3\\1&2&3&4&4\\1&2&3&4&5\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} = 1$$

$R_5 \longrightarrow R_5 - R_4$

$R_4 \longrightarrow R_4 - R_3$

$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$

Questo giochetto si può fare per ogni n

ESERCIZIO 2

Siano A, B, C le matrici 3×3 che rappresentano rispettivamente f, g, h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Il termine noto del polin. caratteristico $p_A(t)$ è $\det(A)$

$p_f = -t^3 + \_\_ - t \Rightarrow \det(A) = 0$ ~~$\Rightarrow f$ non è un isomorfismo~~

$p_g = -t^3 + \_\_ - 9t + 3 \Rightarrow \det(B) = 3$ ~~$\Rightarrow g$ è isomorfismo~~

$p_h = -t^3 + \_\_ - 3t + 1 \Rightarrow \det(C) = 1$ ~~$\Rightarrow h$ è isomorfismo~~

$M_{\mathcal{B}_c}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}_c}(f)\, M_{\mathcal{B}_c}(g) = AB \qquad \det(AB) \overset{\text{t. Binet}}{=} \overbrace{\det(A)}^{=0} \det(B) = 0$

$M_{\mathcal{B}_c}(g \circ h) = M_{\mathcal{B}_c}(g)\, M_{\mathcal{B}_c}(h) = BC \qquad \det(BC) = \det(B) \cdot \det(C) = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$

$M_{\mathcal{B}_c}(h \circ f) = M_{\mathcal{B}_c}(h)\, M_{\mathcal{B}_c}(f) = CA \qquad \det(CA) = \det(C) \cdot \det(A) = 1 \cdot 0 = 0$

Quindi $g \circ h$ è l'unico endomorfismo iniettivo dei tre.
Poiché $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < \infty$, $g \circ h$ è anche suriettivo.

ESERCIZIO 3

La matrice simmetrica 3×3 associata alla conica C è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\underline{\det(A) = -1} \qquad \underline{\det(A') = 0}} \qquad \underline{rk(A') = 2}$$

Quindi C è una parabola. per queste due relazioni

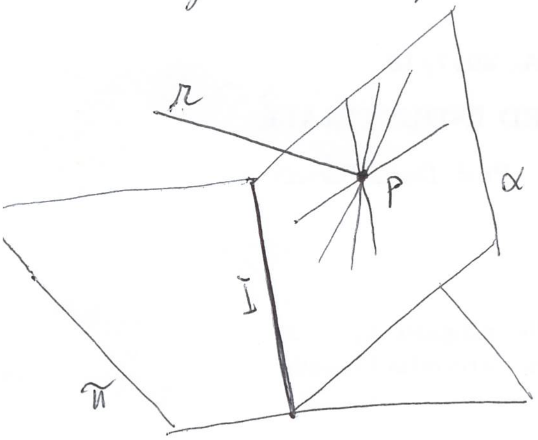
La matrice associata alla conica D di equazione $x^2 + 3y = 0$ è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(B) = -\frac{9}{4} \neq -1 = \det(A)$$

Basta questo per dire che un'isometria $f: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $f(C) = D$ non esiste

ESERCIZIO 4

L'insieme di tutte le rette come s forma il fascio di rette nel piano α, ortogonale ad r e passante per P, di "sostegno" il punto P $P \notin \pi$



La direzione di r è generata dal vettore

$$u = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Il generico piano ortogonale ad r ha, quindi, equazione

$$2x - y + z = d$$

Per trovare α basta imporre il passaggio per P:

$2 \cdot 1 - (-1) + 1 = d$ $d = 4$ e α è $2x - y + z = 4$

L'insieme I è, chiaramente, la retta $\alpha \cap \pi$:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad rg\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow \alpha \cap \pi \text{ è una retta}$$

L'unica retta del "tipo s" che non interseca π è la retta del fascio di tutte le rette su α passanti per P che è parallela a π.

I piani paralleli a π sono tutti quelli del tipo

$x + y = \delta$ $\delta \in \mathbb{R}$. Impongo il passaggio per P

$1 - 1 = \delta$ $\delta = 0$

L'unica retta del tipo s che non interseca π è

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$