Equilibrio

RETI CONGESTIONATE DUE

(Deterministic User Equilibrium)

Insiemi di fattibilità

Ricordiamo:

A matrice di incidenza Archi – Percorsi

B matrice di incidenza Coppie o/d . Percorsi

Un vettore di flussi di percorsi è fayyibile se

1. I flussi sono non negativi $F_k \geq 0$
2. La domanda è conservata

$$\sum_{k \epsilon I_i} b_k F_k = d_i$$

Insiemi di fattibilità

In forma vettoriale:

$$\mathbf{F} \geq 0$$

$$\mathbf{BF} = \mathbf{d}$$

L'insieme di fattibilità dei flussi di percorso è:

$$\boldsymbol{S_F} = \{ \boldsymbol{F} : \mathbf{F} \geq 0 , \mathbf{BF} = \mathbf{d} \}$$

Considerando la relazione tra flussi d'arco e di percorso

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \, \mathbf{F}$$

Insiemi di fattibilità

L'insieme di fattibilità dei flussi d'arco è:

$$\boldsymbol{S_f} = \{\, \boldsymbol{f} : \; f = A\,F \,,\, F \in \boldsymbol{S_F} \}$$

$\boldsymbol{S_F}$ è un insieme convesso e chiuso e i punti di frontiera appartengono all'insieme

Deterministic User Equilibrium

Gli utenti della i-esima coppia o/d scelgono i percorsi k di minimo costo. Pertanto la probabilità di scelta non nulla implica che il percorso sia di minimo costo:

$$p_{ki}^* > 0 \;\Rightarrow\; C_{ki}^* \leq C_{hi}^* \qquad \forall\, h \neq k \quad k \epsilon I_i$$

O, in termini di flusso:

$$F_{ki}^* = p_{ki}^* \cdot d_i > 0 \;\Rightarrow\; C_{ki}^* \leq C_{hi}^* \qquad \forall h \neq k \quad k \epsilon I_i$$

Principio di Wardrop

In condizioni di equilibrio nessun utente può ridurre il suo costo cambiando unilateralmente percorso

Le precedenti espressioni non consentono di determinare i valori delle percentuali. E' quindi necessario individuare altre modalità per il calcolo di tali percentuali.

Diseguaglianza variazionale

Si può dimostrare che un vettore di flussi di percorso è di equilibrio se e solo se soddidfa alla diseguaglianza variazionale:

$$\mathbf{C}(\mathbf{F}^{*})^{T} \cdot (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{*}) \geq 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{F} \in S_{F}$$

L’espressione vale anche in termini di flussi d’arco:

$$\mathbf{c}(\mathbf{f}^{*})^{T} \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}^{*}) \geq 0 \qquad \forall\, \mathbf{f} \in S_{f}$$

Esistenza e Unicità

ESISTENZA. Condizione sufficiente è che le

funzioni di costo siano continue

UNICITA'. Il vettore dei flussi all'equilibrio è unico se le funzioni di costo sono strettamente crescenti ovvero se si verifica:

$$\lceil \mathbf{c}(\mathbf{f}_1) - \mathbf{c}(\mathbf{f}_2)\rceil^T (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) > \ 0 \quad \forall\, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \epsilon\, S_f$$

Jacobiano

Condizione **sufficiente per avere la stretta monotonicità** è che la matrice Jacobiana delle funzioni di costo

$$J_{ij} = \frac{\partial \mathbf{c}_i(\mathbf{f}_i)}{\partial f_j}$$

sia positiva definita sull'intero insieme di fattibilità

Problema di ottimo

Se lo Jacobiano dei costi è simmetrico il vettore di equilibrio si ottiene risolvendo il seguente problema di ottimo

$$\mathbf{f}^* = argmin_{\mathbf{f}\,\epsilon\, S_f} \oint_0^{\mathbf{f}} \mathbf{c}(\mathbf{v})\, d\mathbf{v}$$

Se le funzioni sono separabili il problema diventa

$$\mathbf{f}^* = argmin_{\mathbf{f}\,\epsilon\, S_f} \sum_l \int_0^{f_l} c_l(v_l) \cdot dv_l$$

Algoritmo

Per la soluzione del problema di ottimo si può utilizzare l'agoritmo di

FRANK e WOLFE

Algoritmo di Frank e Wolfe

Si tratta di risolvere il problema di ottimo

$$f^* = argmin_{f \,\epsilon\, S_f} Z(f)$$

$$Z(f) = \sum_l \int_0^{f_l} c_l(v_l) \cdot dv_l$$

La soluzione è di tipo iterativo. Ad ogni iterazione si parte fal flusso

$$f^k$$

Approssimazione lineare

Si approssima Z(f) in modo lineare

$$Z_L(f) = Z(f^k) + \nabla Z(f^k) \cdot (f - f^k)$$

Il gradiente di Z coincide con il vettore dei costi per cui

$$Z(f) = \sum_l c_l(f^k{}_l) \cdot f_l + \text{cost.}$$

Ad ogni iterazione viene generato un vettore di supporto x^k

tale da minimizzare la funzione Z

Flusso iterazione successiva

$$\boldsymbol{x^k = argmin \ \sum_l c_l(f^k{}_l) \cdot f_l}$$

Si determina quindi sul segmento $\boldsymbol{f^k}$ - $\boldsymbol{x^k}$ il valore dell'iterazione successiva che minimizza Z(f)

$$\boldsymbol{f^{k+1} = f^k + \mu(x^k - f^k)}$$

Dove μ è uno scalare da determinare appunto in modo da minimizzare la funzione Z

Determinazione di $\boldsymbol{\mu}$

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{argmin}_{\mathbf{0\le\mu\le1}} \left[\boldsymbol{Z}(\mu) = \sum_l \int_{\mathbf{0}}^{f_l+\mu\left(x_l^k - f_l^k\right)} \boldsymbol{c_l(v_l)\, dv_l} \right]$$

La soluzione si ottiene derivando e individuando il massimo:

- $\frac{\delta \boldsymbol{Z}(\mu)}{\delta\mu} = \sum_l c_l\left[\boldsymbol{f_l^k} + \mu\left(\boldsymbol{x_l^k} - \boldsymbol{f_l^k}\right)\right] \cdot \left(\boldsymbol{x_l^k} - \boldsymbol{f_l^k}\right) = \mathbf{0}$

Il passaggio per lo zero si può individuare usando l'algoritmo di bisezione

Fine algoritmo

Si calcola

$$f_l^{k+1} = f_l^k + \mu\left(x_l^k - f_l^k\right)$$

E si effettua il test di arresto

$$max_l \frac{\left|f_l^{k+1} - f_l^k\right|}{f_l^k} \leq \varepsilon$$