Equilibrio

RETI CONGESTIONATE SUE

(Stochastic User Equilibrium)

Probabilità

Se utilizziamo un modello Logit, la probabilità Ricordiamo:i scelta di un percorso è una funzione continua del vettore dei costi:

$$\boldsymbol{p_k\,(C) = \frac{e^{-C_k/\theta}}{\sum_{h \epsilon I_i} e^{-C_h/\theta}}}$$

Esistenza e Unicità

ESISTENZA. Condizione sufficiente è che le

funzioni di costo siano continue

UNICITA'. Condizione sufficiente è che lo acobiano dei costi sia una marice positiva definita (condizione sufficiente anche per la stretta monotonicità delle funzioni di costo).

Problema di ottimo

In questo caso il problema di ottimo assume la forma

$$\mathbf{f}^* = \ argmin_{\mathbf{f}\,\epsilon\, S_f} Z(f)$$

con

$$Z(\boldsymbol{f}) = \ \boldsymbol{S}[\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})]^T \cdot \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{f} - \oint_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{c}(\boldsymbol{v})\, \boldsymbol{dv}$$

Funzioni di soddisfazione

Il vettore S, di dimensione pari al numero di coppie O/D, è il vettore delle funzioni di soddisfazione relative alla scelta del percorso fra quelli disponibili per la coppia O/D

$$\boldsymbol{S_i}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{max}[-C_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{f}) \,.: k \epsilon I_i]\}$$

Funzioni che godono della proprietà:

$$\frac{\partial S_i}{\partial C_k} = -p_k(\boldsymbol{C}) \qquad k \epsilon I_i$$

Jacobiano di ***S***

Dalla precedente relazione segue che lo Jacobiano di S rispetto al vettore dei costi di percorso è la trasposta della matrice delle percentuali di scelta. Quindi lo Jacobiano rispetto ai flussi d'arco può essere ottenuto come:

$$\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f})\big) = -\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C})^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{J}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})]$$

Gradiente di Z(f)

Il gradiente della funzione da minimizzare risulta:

$$\nabla Z(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f})\big)^{\boldsymbol{T}\cdot} \boldsymbol{d} + \boldsymbol{J}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})]^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{f} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})$$

Sostituendo a J(S(f)) l'espressione trovata in precedenza si ottiene:

$$\nabla Z(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{J}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{f})] \cdot (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{APd})$$

Flusso all'equilibrio

Il gradiente in corrispondenza al fettore dei flussi di equilibrio deve essere nullo e quindi deve essere verificata la condizione:

$$\boldsymbol{f}^* - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{f}^*)] \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

Ricerca dell'equilibrio

Per la soluzione del problema di ottimo si utilizza un algoritmo iterativo di gradiente utilizzando l'espressione del gradiente relativo al flusso dell'iterazione k

$$\nabla Z(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{J}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}})] \cdot (\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}})] \cdot \boldsymbol{d})$$

Il problema viene risolto generando una sequenza di vettori:

$$\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k+1}} = \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}} + \mu^{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{h}^{\boldsymbol{k}}$$

Ricerca dell'equilibrio

In questo caso $\mu^{\boldsymbol{k}}$ non può essere calcolato con un metodo simile a quello del DUE in quanto il calcolo di S richiederebbe l'esplicitazione di tutti i percorsi.

In alternativa si può scegliere un valore di $\mu^{\boldsymbol{k}}$ decrescente ad ogni iterazione:

$$\mu^{\boldsymbol{k}} = 1/k$$

Ricerca dell'equilibrio

Per la scelta di $\boldsymbol{h^k}$. matrice Jacobiana delle funzioni di costo Gli algoritmi di gradiente usano il gradiente della funzione obiettivo cambiato di segno

$$\boldsymbol{h^k = A \cdot P\left[c\left(f^k\right) \cdot d - f^k\right]}$$

Si osservi che il primo termine della differenza corrisponde ad un'assegnazione SNL

Ricerca dell'equilibrio

I flussi all'iterazione k+1 si ottengono dunque con la

$$\boldsymbol{f}^{k+1} = \boldsymbol{f}^{k} + \frac{1}{k} \cdot \boldsymbol{f}^{k}_{SNL}$$

Algoritmo

Inizializzazione:

azzeramento flussi d'arco

k=1

assegnazione SNL (Dial)

$$\boldsymbol{f}^{1} = \boldsymbol{f}^{0}_{SNL}$$

Step 1

aggiornamento dei costi $c_l^k = c_l\left(f_l^k\right)$

Algoritmo

Step 2

assegnazione SNL $\boldsymbol{h}^{k} = \boldsymbol{f}_{SNL}^{k}$

Step 3

calcolo del nuovo valore dei flussi

$$\boldsymbol{f}^{k+1} = \boldsymbol{f}^{k} + \frac{1}{k} \cdot \boldsymbol{f}_{SNL}^{k}$$

Step 4

test di arresto $\boldsymbol{max}_{l} \frac{\left|f_l^{k+1} - f_l^{k}\right|}{f_l^{k}} \leq \boldsymbol{\varepsilon}$

Algoritmo

Essendo che i flussi da un'iterazione all'altra sono soggetti a variabilità, il test viene effettuato considerando per i valori dei flussi una media effettuata sugli ultimi 2 o 3 valori

Se il test non è verificato si ritorna allo step 1.